1. Diferenciální počet polí

Úloha 1
Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, jehož pohyb je popsán vektorovým polem
a) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$,
b) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$,
c) $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$.

Úloha 2
Určete gradient skalárního pole
a) $u(x, y, z) = x + y + z$,
b) $u(x, y, z) = \cos x + e^y z + xyz$,
c) $u(x, y, z) = r$, $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor.

Úloha 3
Určete divergenci a rotaci vektorového pole
a) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y, -x + y, -2z)$,
b) $\vec{F}(x, y, z) = (2y, 2x + 3z, 3y)$,
c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - z^2, 2, 2xz)$.

Úloha 4
Dokažte, že pro libovolné skalární pole u, v a libovolné vektorové pole $\vec{a}$ platí
a) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, u = \vec{0}$,
b) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \vec{a} = 0$,
c) $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u = \Delta\, u$,
d) $\mathrm{grad}\,(u + v) = \mathrm{grad}\, u + \mathrm{grad}\, v$.

Úloha 5*
Určete gradient skalárního pole ($\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor)
a) $u(x, y, z) = r^2$,
b) $u(x, y, z) = r^3$,
c) $u(x, y, z) = \vec{c}\,\vec{r}$, kde $\vec{c}$ je konstantní vektor,
d) $u(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, kde Q_1, Q_2, π, ϵ jsou konstanty.

Úloha 6*

Určete divergenci a rotaci vektorového pole
a) $\vec{F}(x, y, z) = \vec{r}$,
b) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r}$.

Úloha 7*
Dokažte, že pro libovolné skalární pole u, v, konstantu c, funkci jedné proměnné f a libovolné vektorové pole $\vec{a}, \vec{b}$ platí
a) $\mathrm{grad}\,(cu) = c\,\mathrm{grad}\,u$,
b) $\mathrm{grad}\,(uv) = u\,\mathrm{grad}\,v + v\,\mathrm{grad}\,u$,
c) $\mathrm{grad}\,f(u) = f'(u)\,\mathrm{grad}\,u$,
d) $\mathrm{div}\,(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{div}\,\vec{a} + \mathrm{div}\,\vec{b}$,
e) $\mathrm{div}\,(u\vec{a}) = u\,\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}\,\mathrm{grad}\,u$,
f) $\Delta \mathrm{grad}\,u = \mathrm{grad}\,\Delta\,u$.