2. Integrální počet polí

Úloha 1
Dokažte, že $\vec{\varphi}$ je parametrické zadání křivky:
a) $\vec{\varphi} = (t, t+1), t \in R$, přímka $y = x + 1$.
b) $\vec{\varphi} = (r\cos t, r\sin t), t \in (0, 2\pi)$, kružnice o poloměru r se středem v počátku soustavy souřadnic.

Úloha 2
Vypočtěte pomocí křivkového integrálu práci pole $\vec{F}$ po křivce $\vec{l}$:
a) $\vec{l}(t) = (t, 0), t \in (0, 2), \vec{F}(x, y) = (0, 1)$
b) $\vec{l}(t) = (t, t-1), t \in (0, 1), \vec{F}(x, y) = (1, 1)$
c) $\vec{l}(t) = (t, t^2), t \in (0, 1), \vec{F}(x, y) = (x - y, x + y)$
d) $\vec{l}(t) = (\cos t, \sin t, 0), t \in (0, 2\pi), \vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$

Úloha 3
Dokažte, že $\vec{\sigma}$ je parametrické zadání plochy:
a) $\vec{\sigma} = (1 - u - v, u, v), u, v \in R$, rovina $z = 1 - x - y$.
b) $\vec{\sigma} = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta), \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi)$, kulová plocha o poloměru r se středem v počátku soustavy souřadnic.

Úloha 4
Pomocí plošného integrálu vypočítejte tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou $\vec{S}$, použijte vektor vnější normály:
a) $\vec{S}(u, v) = (0, u, v), u, v \in (1, 2), \vec{F}(x, y, z) = (0, y, z)$
b) $\vec{S}(u, v) = (u - v, 2u - v, u + v), u, v \in (0, 1), \vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, srovnejte použití obou voleb normálových vektorů
c) $\vec{S}(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), u \in (0, 2\pi), v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$

Úloha 5*
Vypočtěte pomocí křivkového integrálu práci pole $\vec{F}$ po křivce $\vec{l}$:
a) $\vec{l}(t) = (t, t^2), t \in (-1, 1), \vec{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$
b) $\vec{l}(t) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t), t \in (0, 1), \vec{F}(x, y, z) = (x, y, x + y - 1)$
c) $\vec{l}(t) = (2\cos t, -3\sin t, 0), t \in (0, \frac{\pi}{2}), \vec{F}(x, y, z) = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Úloha 6*
Délka křivky $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathcal{R}$ je definována jako

$$\int\limits_{\vec{\varphi}} 1 \,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_a^b \left| \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t.$$

Vypočítejte ji pro následující křivky (r je konstanta):
a) $\vec{\varphi}(t) = (t, t), t \in (0, 1)$
b) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos t, 0, r \sin t), t \in (0, 2\pi)$
c) $\vec{\varphi}(t) = (3t - 2, 2t + 1, 6t), t \in (0, a)$

Úloha 7*
Obsah plochy $\vec{\sigma} : \Sigma \to \mathcal{R}^3, (\Sigma \subset \mathcal{R}^2)$ je definován jako

$$\int\int_{\vec{\sigma}} 1 \,\mathrm{d}\sigma = \int\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t_2} \right| \mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2.$$

Vypočítejte obsah následujících ploch (t_1, t_2 jsou konstanty):
a) $\vec{\sigma}(t_1, t_2) = (t_1, t_2, 0), t_1 \in (-2, 1) t_2 \in (0, 1)$
b) $\vec{\sigma}(t_1, t_2) = (r \cos t_1, r \sin t_1, t_2), t_1 \in (0, 2\pi), t_2 \in (0, v)$
c) $\vec{\sigma}(t_1, t_2) = (r \cos t_1 \sin t_2, r \sin t_1 \sin t_2, r \cos t_2), t_1 \in (0, 2\pi), t_2 \in (0, \pi)$

Úloha 8*
Ověřte, zda je pole $\vec{F}$ potenciálové a nalezněte jeho potenciál (Q_1, Q_2, π, ϵ jsou konstanty):
a) $\vec{F}(x, y) = (x, y)$
b) $\vec{F}(x, y, z) = (2y, 2x + 3z, 3y)$
c) $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$