

Kvantová fyzika, KFY/7KVAF

ZS 2021/2022

Téma 2: Vlastnosti lineárních operátorů

- Vypočtete komutátor
 - $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$ tří operátorů $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ s použitím $[\hat{A}, \hat{C}]$ a $[\hat{B}, \hat{C}]$,
 - $[\frac{d}{dx}, x]$,
 - operátoru polohy \hat{x} a hybnosti \hat{p} ,
 - $[\hat{x} - \hat{p}, \hat{p} - \hat{x}]$,
 - $[\hat{x}\hat{p}, \hat{x}]$,
 - $[\frac{\partial}{\partial x}, f(x, y, z)]$, kde f je komplexní funkce,
 - $[\hat{x}, \Delta]$.
- Které z následujících operátorů \hat{A} jsou lineární ($u \equiv u(x)$ je komplexní funkce)?
 - $\hat{A}u = \lambda u$, kde λ je komplexní konstanta,
 - $\hat{A}u = u^*$,
 - $\hat{A}u = u^2$,
 - $\hat{A}u = \frac{du}{dx}$,
 - $\hat{A}u = \frac{1}{u}$,
 - $\hat{A}u = \frac{d^2u}{dx^2} + 3u^2$.
- Nalezněte sdružené operátory k operátorům a) – e) a ověřte zda nejsou samosdružené (hermitovské operátory):
 - $\hat{A} = x$,
 - $\hat{A} = \frac{d}{dx}$,
 - $\hat{A} = f(x)$, $f(x)$ je komplexní funkce,
 - $\hat{A} = f(x)$, $f(x)$ je reálná funkce,
 - $\hat{A} = c$, c je komplexní číslo.
- Ověřte, zda jsou následující operátory hermitovské
 - operátor hybnosti $\hat{p} = -i\hbar\nabla$,
 - Laplaceův operátor Δ .
- Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:
 - $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
 - dvojhledinového hamiltoniánu $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & A \\ A & E_0 \end{pmatrix}$, $E_0, A \in \mathbb{R}$.
- Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní funkce následujících operátorů:
 - $\frac{d}{dx}$,
 - $i(\frac{d}{dx})$,
 - $x + \frac{d}{dx}$,
 - $-i(\frac{d}{d\varphi})$, kde φ je úhel rotace okolo osy z (ve sférických souřadnicích).
- Propojte vlastní funkce v pravém sloupci s jejich odpovídajícími operátory v levém sloupci. Jaké vlastní hodnoty odpovídají vlastním funkcím?
 - $(1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$ a. $4x^4 - 12x^2 + 3$
 - $\frac{d^2}{dx^2}$ b. $5x^4$
 - $x\frac{d}{dx}$ c. $e^{3x} + e^{-3x}$
 - $\frac{d}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$ d. $x^2 - 4x + 2$
 - $x\frac{d^2}{dx^2} + (1 - x)\frac{d}{dx}$ e. $4x^3 - 3x$