# DERIVACE
## FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

### ÚVODNÍ POZNÁMKY

I derivace, podobně jako limity, můžeme počítat několikerým způsobem, a to konkrétně pomocí:

- definice,
- vět o algebře derivací,
- věty o derivaci složené funkce,
- věty o derivaci složené funkce.

Obvykle postupujeme tak, že nejdříve určíme derivace jakési základní třídy funkcí přímo pomocí definice[1] a následně tuto minimální třídu rozšíříme pomocí výše uvedených vět i na funkce komplikovanější.

### VÝPOČET DERIVACE POMOCÍ DEFINICE

Připomeňme si nejdříve definici derivace funkce $f$ v bodě $a$

$$f'(a) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Budeme-li chtít naznačit, že bod, v němž derivaci počítáme, je zcela libovolný, použijeme pro něj obvyklejší označení proměnné – $x$, a definici přepíšeme do tvaru

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

**PŘÍKLAD 1**

Pro $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$ určete $f'(2)$.

**Řešení**

Příklad vyřešíme pomocí obou variant definice derivace. Budeme-li počítat správně, musíme pochopitelně dojít v obou případech ke stejnému výsledku. Postup výpočtu je jasný

a) dosadíme zadání do obecné definice derivace,
b) upravíme limitovaný výraz,[2]
c) pomocí vhodných vět (zpravidla algebraických) určíme limitu upraveného výrazu.

A) $$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{(2x^2+6x-3)-(2\times 2^2+6\times 2-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2+6x-20}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+5)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left[2(x+5)\right] = \lim_{x\to 2}2\times\lim_{x\to 2}(x+5) = \lim_{x\to 2}2\times\left(\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}5\right) =$$

$$= 2\times(2+5) = \underline{\underline{14}}.$$

B) $$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[2\times(2+\Delta x)^2+6\times(2+\Delta x)-3\right]-\left[2\times 2^2+6\times 2-3\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[2\times(4+4\times\Delta x+\Delta x^2)+6\times(2+\Delta x)-3\right]-17}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x^2+14\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+14) =$$

---

[1] Pro naše potřeby bude stačit, pokud pomocí definice určíme derivace jen čtyř elementárních funkcí – $x^n$, $\sin x$, $\cos x$ a $e^x$.

[2] Limitu, kterou získáme po dosazení zadání do definice derivace, nemůžeme počítat přímo (např. pomocí algebraických vět). Došli bychom totiž k neurčitému výrazu 0/0.

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} 14 = \lim_{\Delta x\to 0} 2 \times \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} 14 = 2\times 0 + 14 = \underline{\underline{14}}\,.$$

Platí tedy $f'(2) = 14$.

**PŘÍKLAD 2**

Pro $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$ určete $f'(a)$.

**Řešení**

Tento příklad je obecnější verzí příkladu 1, derivujeme stejnou funkci, pouze bod, v němž derivaci počítáme je obecný. Podobně jako v předcházejícím příkladu bychom mohli výpočet provést dvojím způsobem. V zájmu šetření místem se omezíme tentokrát jen na způsob první - A, výpočet podle schématu B přenecháváme čtenáři.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(2x^2+6x-3)-(2a^2+6a-3)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2(x^2-a^2)+6(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\left[2(x+a)+6\right](x-a)}{x-a} =$$

$$\lim_{x\to a}\left[2(x+a)+6\right] = \lim_{x\to a} 2 \times \lim_{x\to a}(x+a) + \lim_{x\to a} 6 = \lim_{x\to a} 2 \times \left(\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} a\right) + \lim_{x\to a} 6 = 2(a+a)+6 = \underline{\underline{4a+6}}$$

Můžeme tedy psát $f'(a) = 4a + 6$ nebo, použijeme-li pro bod, v němž derivaci počítáme, označení *x*, také $f'(x) \equiv (2x^2 + 6x - 3)' = 4x + 6$.[3]

**PŘÍKLAD 3**

Dokažte, že pro libovolné přirozené *n* platí $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

**Řešení**

Tímto příkladem se dostáváme k prvnímu ze čtyř obecných vzorců, které potřebujeme znát, chceme-li v dalším používat věty o derivacích.[4] Při jeho řešení (tentokrát budeme postupovat podle scénáře B) využijeme tzv. binomickou větu

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\,,$$

kde

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

a symbolem *k*! označujeme faktoriál čísla *k*, $k! \equiv 1\times 2\times 3\times \ldots \times k$.

Ale zpět k výpočtu naší derivace:

---

[3] Všimněte si, že pokud do tohoto vzorce dosadíme podle zadání příkladu 1 $a = 2$, získáme též i výsledek příkladu 1 (14).

[4] Pozor ovšem, vzorec dokážeme zatím jen pro přirozené mocniny, $n$ = 1, 2, 3, atd. Rozšíření jeho platnosti na obecné reálné mocniny provedeme postupně v dalších příkladech této kapitoly.

$$\left(x^n\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n-1}x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \binom{n}{n-1}x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots \binom{n}{n-1}x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x\right] + \ldots + \lim_{\Delta x\to 0}\left[\Delta x^{n-1}\right].$$

V posledním výraze jsou ale všechny limity až na první nulové, můžeme tedy psát [5]

$$\left(x^n\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1}$$

a po úpravě

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\times 1!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1}{(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1\times 1} = n$$

i výsledný vzorec

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3**

**1.** Pomocí definice vypočítejte $f'(a)$ pro následující funkce a volby bodu $a$

| | | |
|---|---|---|
| a) $f(x) = x^3$, $a = -2$ | d) $f(x) = x^3$, $a \in \mathrm{R}$ | g) $f(x) = c$, $a \in \mathrm{R}$ [6] |
| b) $f(x) = x^4$, $a = 1$ | e) $f(x) = x^4$, $a \in \mathrm{R}$ | ●h) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $a = 1$ [7] |
| c) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $a = 2$ | f) $f(x) = x^3 - x^2$, $a \in \mathrm{R}$ | ●●i) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $a \in \mathrm{R}$ |

**PŘÍKLAD 4**

Dokažte, že $(\cos x)' = -\sin x$ a $(\sin x)' = \cos x$.

**Řešení**

Na řadě jsou další dvě důležité derivace, které je nutno vypočíst pomocí definice. Pro ***derivaci funkce kosinus*** platí

$$(\cos x)' \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x - \sin x\sin\Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos x\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\cos x \times \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0}\sin x \times \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$

[5] Využíváme toho, že se $x$ chová při limitování podle $\Delta x$ jako konstanta. Tuto poznámku si dobře promyslete a zapamatujte. Ještě několikrát její tvrzení použijeme, např. již v obou následujících příkladech.

[6] $c$ je libovolná reálná konstanta.

[7] $A$, $B$ a $C$ jsou libovolné reálné konstanty.

$$= \cos x \times 0 - \sin x \times 1 = \underline{\underline{-\sin x}} \,,$$

kde jsme využili součtový vzorec pro goniometrickou funkci kosinus

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

a limit známých z cvičení 3 k příkladu 6 kapitoly 1 (*Spojitost a limity*)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1 .$$

Podobně můžeme psát pro ***derivaci funkce sinus***

$$(\sin x)' \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\sin\Delta x + \sin x\cos\Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin x\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\sin x \times \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\cos x \times \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$

$$\sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \underline{\underline{\cos x}} \,,$$

přičemž tentokrát využíváme součtového vzorce

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta .$$

**PŘÍKLAD 5**

Dokažte, že $(e^x)' = e^x$.

**Řešení**

Poslední z derivací, kterou musíme určit pomocí definice, je derivace exponenciální funkce s přirozeným základem. I v tomto výpočtu využijeme znalostí o limitách z cvičení 3 k příkladu 6 kapitoly 1 (*Spojitost a limity*). Výpočet je, až na jednu netriviální limitu[8], jednoduchý

$$(e^x)' \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x \times \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \times 1 = \underline{\underline{e^x}} .$$

## VÝPOČET DERIVACE POMOCÍ ALGEBRAICKÝCH VĚT

Nejdříve si věty, které budeme v dalším používat, stručně připomeňme. Pro přehlednost je zapisujeme v co nejstručnějším tvaru. Podrobné znění naleznete v kapitole 1.2 *Breviáře*.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(cf)' = cf'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,

[8] $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ .

**PŘÍKLAD 6**

Pomocí vět o algebře derivací a vzorců[9] $x' = 1$ a $c' = 0$ určete $f'(1)$, kde $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+1}$.

**Řešení**

Nejdříve určíme derivaci funkce *f* v obecném bodě *x*:

$$\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)' \overset{\substack{\text{derivace}\\ \text{podílu}}}{=} \frac{(3x+1)'(2x+1)-(3x+1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} \overset{\substack{\text{derivace}\\ \text{součtu}}}{=} \frac{\left([3x]'+1'\right)(2x+1)-(3x+1)\left([2x]'+1'\right)}{(2x+1)^2} =$$

$$\overset{\substack{\text{derivace}\\ \text{konst. násobku}\\ \text{funkce}}}{=} \frac{\left(3x'+1'\right)(2x+1)-(3x+1)\left(2x'+1'\right)}{(2x+1)^2} \overset{\substack{\text{vzorce pro}\\ x' \text{ a } c'}}{=} \frac{(3\times1+0)(2x+1)-(3x+1)(2\times1+0)}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{(3\times1+0)(2x+1)-(3x+1)(2\times1+0)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}\,.$$

Můžeme proto psát

$$f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

a po dosazení $x = 1$ i

$$f'(1) = \frac{1}{(2\times1+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}\,.$$

**PŘÍKLAD 7**

Dokažte, že pro přirozená *n* platí $\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}$.[10]

**Řešení**

Uvědomíme-li si, že $x^{-n} \equiv 1/x^n$ můžeme pomocí věty o derivaci podílu psát

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1'\times x^n - 1\times(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0\times x^n - 1\times n\times x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}\,.$$

---

[9] Viz příklad 3 a cvičení g k příkladům 1-3.

[10] Tímto příkladem rozšiřujeme platnost vzorce $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ na všechna <u>celá (kladná i záporná)</u> *n*.

**PŘÍKLAD 8**

Dokažte, že $(\mathrm{tg}\,x)' = 1/\cos^2 x$.

**Řešení**

Při řešení tohoto příkladu užijeme definici goniometrické funkce tangens, $\mathrm{tg}\,x \equiv \sin x/\cos x$, větu o derivaci podílu a dříve odvozené vzorce pro derivaci sinu a kosinu:

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - \sin x \times (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}.$$

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 6-8**

**1.** Určete $f'(a)$ pro zadané funkce $f$ a hodnoty $a$.

a) $f(x) = (3x+1)(-2x+2)$, $a = -1$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$, $a = \pi$

g) $f(x) = |x^2 - 1|$, $a = 3$ [11]

b) $f(x) = \dfrac{-x}{1-x}$, $a = 0$

e) $f(x) = e^{2x}$, $a = -1$

h) $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$, $a = -1$

c) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$, $a = \pi/4$

f) $f(x) = e^{-x}$, $a = 2$

i) $f(x) = |\cos x + \sin x|$, $a = 3\pi/4$

**2.** Pro zadané funkce vypočítejte $f'(x)$. [12]

a) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

●b) $f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$

●c) $f(x) = \dfrac{Ax+B}{Cx+D}$

d) $f(x) = \mathrm{cotg}\,x$

e) $f(x) = \sin^2 x$

f) $f(x) = \sin^3 x$

●g) $f(x) = \cos(2x)$

●h) $f(x) = \sin(2x)$

●i) $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$

**3.** Určete $\left(e^{2x}\right)'$ a $\left(e^{3x}\right)'$.

●●**4.** Pomocí principu matematické indukce dokažte platnost vztahu $\left(e^{nx}\right)' = ne^{nx}$, $n$ je přirozené číslo.

**5.** Pomocí výsledku cvičení 4 dokažte pro přirozená $n$ platnost vztahu $\left(e^{-nx}\right)' = -ne^{-nx}$.

## VÝPOČET DERIVACE POMOCÍ VĚTY O DERIVACI INVERZNÍ FUNKCE

Derivaci inverzní funkce počítáme podle vzorce

$$f^{-1}(x)' = 1/f'(y)\big|_{y=f^{-1}(x)}.$$

Postup je tedy následující:

a) nalezneme funkci $f(x)$, k níž je zadaná funkce $f^{-1}(x)$ inverzní,

[11] Při výpočtu derivace zadané funkce v bodě $a = 3$ se můžeme omezit jen na malé okolí tohoto bodu, např. na interval $(2{,}5; 3{,}5)$. Pro $x \in (2{,}5; 3{,}5)$ je ale výraz $x^2 - 1$ kladný, můžeme proto při výpočtu derivace psát $f(x) = x^2 - 1$.

[12] $A$, $B$, $C$, $D$ a $A_k$ jsou reálné konstanty, $n$ přirozené číslo.

b) tuto funkci derivujeme podle její nezávislé proměnné (z pochopitelných důvodů pro ni používáme jiné označení, zde *y*, než pro nezávislou proměnnou funkce $f^{-1}$ ),
c) uděláme reciprokou hodnotu výsledku
d) a nakonec dosadíme za nezávislou proměnnou funkce *f* ze vzorce $y = f^{-1}(x)$.

**PŘÍKLAD 9**

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce určete $\sqrt{x}'$.

**Řešení**

Funkce $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ je inverzní funkcí k funkci $f(y) = y^2$, jejíž definiční obor je omezen na nezáporná *y*.[13] Derivaci $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ budeme tedy počítat podle vzorce

$$\sqrt{x}' \equiv f^{-1}(x)' = \left.\frac{1}{f(y)'}\right|_{y=f^{-1}(x)} \equiv \left.\frac{1}{(y^2)'}\right|_{y=\sqrt{x}} = \ldots,$$

který dále vede k

$$\ldots = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}.$$

Všimněte si, že získaný výsledek je možno psát i ve tvaru

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

který je zcela v souladu s dříve získaným vzorcem platným pro celočíselné mocniny $(x^n)' = nx^{n-1}$.

**PŘÍKLAD 10**

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce určete $\left(\ln x\right)'$.

**Řešení**

Funkce $f^{-1}(x) = \ln x$ je inverzní funkcí k funkci $f(y) = e^y$, můžeme proto (nyní již stručněji) psát

$$\left(\ln x\right)' = \left.\frac{1}{(e^y)'}\right|_{y=\ln x} = \left.\frac{1}{e^y}\right|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}.$$

**PŘÍKLAD 11**

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce určete $\left(\arcsin x\right)'$.

**Řešení**

Funkce $f^{-1}(x) = \arcsin x$ je inverzní funkcí ke goniometrické funkci $f(y) = \sin y$, jejíž definiční obor byl omezen z důvodů prostoty na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Můžeme tedy psát

[13] Jinak by nebyla funkce $f(y) = y^2$ prostá, a neměla by tedy ani funkci inverzní.

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{(\sin y)'}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\cos x}\bigg|_{y=\arcsin x} = \dots \; .$$

a zajisté i pokračovat a napsat výsledek formálně ve tvaru

$$\dots = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \, .$$

Jen ztěží si ale pod takovým výsledkem představíme něco konkrétního. Vyplatí se proto následující úprava[14]

$$\frac{1}{\cos y}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, ,$$

pomocí které získáme konečný výsledek v poněkud přijatelnějším tvaru

$$\underline{\underline{\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}} \, .$$

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 9-11**

**1.** Pomocí věty o derivaci inverzní funkce určete derivace následujících funkcí. Určete též definiční obor každé z uvedených funkcí.

a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ [15]

b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2-6x}$

c) $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$

d) $f^{-1}(x) = \arccos x$ [16]

e) $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$

f) $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$

## VÝPOČET DERIVACE POMOCÍ VĚTY O DERIVACI SLOŽENÉ FUNKCE

Derivaci složené funkce $f(g(x))$ počítáme podle vzorce

$$f'(g(x)) = f'(y)\big|_{y=g(x)} \times g'(x) \, .$$

Postup je tedy následující:

a) nalezneme rozklad derivované funkce na funkci vnější $f(y)$ a funkci vnitřní $g(x)$,[17]
b) provedeme derivaci vnější funkce podle její nezávislé proměnné (zde $y$) a po provedeném derivování dosadíme za tuto nezávislou proměnnou funkci vnitřní,
c) provedeme derivaci funkce vnitřní,
d) vše dosadíme do obecného vzorce pro derivování složené funkce.

---

[14] Protože jsme se s $y$ omezili na interval $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, můžeme psát $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ a ne pouze $|\cos y| = \sqrt{1-\sin^2 y}$, jak by plynulo z obecné rovnosti $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$.

[15] Nejdříve musíme zjistit, ke které funkci je $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ funkcí inverzní. Postup je obvyklý: $y = \sqrt{x-1}$ právě, když $x = y^2 + 1$. Hledaná funkce je tedy dána předpisem $f(y) = y^2 + 1$. Dále již postupujeme podle věty o derivaci inverzní funkce.

[16] Výsledky cvičení d – f, ke kterým byste měli dojít, naleznete v *Breviáři*, kap. 1.2.

[17] Rozklad nemusí být vždy jednoznačný ani na první pohled zřejmý. Často se nabízí více možností.

**PŘÍKLAD 12**

Pomocí věty o derivaci složené funkce určete $(x^2+3)^{99\prime}$.[18]

**Řešení**

Funkce $h(x)=(x^2+3)^{99}$ je evidentně složenou funkcí, $h(x)=f(g(x))$. Odpovídající vnější a vnitřní funkce jsou $f(y)=y^{99}$ a $g(x)=x^2+3$. Můžeme tedy psát

- $f'(y)=99y^{98}$,
- $f'(y)\big|_{y=g(x)}=99y^{98}\big|_{y=x^2+3}=99(x^2+3)^{98}$,
- $g'(x)=2x$,
- $f'(g(x))=99(x^2+3)^{98}\times 2x=198x(x^2+3)^{98}$.

Platí tedy

$$\underline{\underline{(x^2+3)^{99\prime}=198x(x^2+3)^{98}}}\,.$$

**PŘÍKLAD 13**

Určete první derivaci funkce $h(x)=a^x$, kde $a$ je kladné číslo.

**Řešení**

Při řešení tohoto příkladu využijeme jeden poměrně užitečný trik. Pro $a^x$ budeme psát $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$, což nám umožní převést derivovanou funkci do tvaru $h(x)=e^{x\ln a}$. Z něj je již na první pohled patrno, že se jedná o funkci složenou, s vnější funkcí je $f(y)=e^y$ a s funkcí vnitřní $g(x)=x\ln a$. Můžeme proto psát

$$h'(x)\equiv\left(e^{x\ln a}\right)'=\left(e^y\right)'\Big|_{y=x\ln a}\times\left(x\ln a\right)'=e^y\Big|_{y=x\ln a}\times\ln a=e^{x\ln a}\times\ln a=e^{\ln a^x}\times\ln a=\underline{\underline{a^x\ln a}}\,.$$

**CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 12-13**

**1.** Pomocí věty o derivaci složené funkce určete derivace následujících funkcí. Určete též definiční obor každé z uvedených funkcí.

| | | |
|---|---|---|
| a) $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ | d) $h(x)=\ln(x^2-1)$ | g) $h(x)=x^x$ [19] |
| b) $h(x)=\sin(5x-6)$ | e) $h(x)=e^{-x^2/4}$ | ●h) $h(x)=\ln\lvert\sin x\rvert$ [20] |
| c) $h(x)=\cos(\sin x)$ | f) $h(x)=\log_a x$ [21] | ●i) $h(x)=\ln\lvert\cos x\rvert$ |

[18] Uvedenou derivaci bychom mohli jistě počítat pomocí věty o derivaci součinu aplikované na 99-násobný součin $(x^2+3)\times(x^2+3)\times\ldots\times(x^2+3)$. Není však zajisté žádných pochyb o tom, jak komplikovaný výpočet by to byl.Věta o derivování složené funkce vede naopak k výpočtu poměrně jednoduchému.

[19] Použijte triku z příkladu 13.

[20] Derivaci počítejte zvlášť na intervalech, na nichž je $\sin x>0$, a zvlášť na intervalech, na nichž je $\sin x<0$ .

[21] Využijte výsledku příkladu 13 a věty o derivaci inverzní funkce.

## Výsledky:

### CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1-3

| | | |
|---|---|---|
| 1a) 12, | 1d) $3a^2$, | 1g) 0, |
| 1b) 4, | 1e) $4a^3$, | 1h) $2A+B$, |
| 1c) 9, | 1f) $3a^2-2a$, | 1i) $2Aa+B$, |

### CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 6-8

| | | |
|---|---|---|
| 1a) 16, | 1d) $-2\pi$, | 1g) 6, |
| 1b) -1, | 1e) $2e^{-2}$, | 1h) 0, |
| 1c) 4, | 1f) $-e^{-2}$, | 1i) 0. |
| 2a) $2Ax+B$, | 2d) $-\frac{1}{\sin^2 x}$, | 2g) $-2\sin(2x)$, |
| 2b) $nA_n x^{n-1}+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2A_2x+A_1$, | 2e) $\sin 2x$, | 2h) $2\cos(2x)$, |
| 2c) $\frac{AD-BC}{(Cx+D)^2}$, | 2f) $3\cos x\sin^2 x$, | 2i) $x\in(-2,-1)\Rightarrow -2x-3$; $x\in(-\infty,-2\rangle\cup\langle-1,+\infty)\Rightarrow 2x+3$. |

3) $\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}$, $\left(e^{3x}\right)'=3e^{3x}$.

### CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 9-11

| | | |
|---|---|---|
| 1a) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, | 1c) $\frac{1}{x+1}$, | 1e) $\frac{1}{1+x^2}$, |
| 1b) $-\frac{2}{(2-6x)^{\frac{2}{3}}}$, | 1d) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, | 1f) $-\frac{1}{1+x^2}$. |

### CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 12-13

| | | |
|---|---|---|
| 1a) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, | 1d) $\frac{2x}{x^2-1}$, | 1g) $x^x(\ln x+1)$, |
| 1b) $5\cos(5x-6)$, | 1e) $-\frac{xe^{-x^2/4}}{2}$, | 1h) $\operatorname{cotg} x$, |
| 1c) $-\sin(\sin x)\cos x$, | 1f) $\frac{1}{x\ln a}$, | 1i) $-\operatorname{tg} x$. |