NEURČITÝ INTEGRÁL, PRIMITIVNÍ FUNKCE

PŘÍKLAD 1

Pro $x \in (-1,1)$ ověřte pomocí definice primitivní funkce platnost rovnosti $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$.

Řešení

Podle definice neurčitého integrálu (primitivní funkce) platí [1]

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(x).$$

Rovnost ze zadání příkladu bude tedy platná, právě když bude platit

$$\left[\tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C\right]' = \sqrt{1-x^2}\ .$$

Naším úkolem je tedy najít první derivaci levé strany rovnosti ze zadání příkladu a porovnat ji s integrandem na straně pravé:

$$\left[\tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C\right]' = \left(\tfrac{1}{2}\arcsin x\right)' + \left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right)' + C' = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x\right)' + \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)' =$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}x'\sqrt{1-x^2} + + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\,' = \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}x\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}x\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{1+(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}\ .$$

Derivace levé strany rovnosti ze zadání příkladu je tedy rovna integrandu ze strany pravé, a proto podle definice platí i rovnost jako celek.

PŘÍKLAD 2

Pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ověřte pomocí definice primitivní funkce platnost rovnosti $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln\left|\cos x\right| + C$.

Řešení

Tentokrát máme ověřit platnost následujícího vztahu

$$\left[-\ln\left|\cos x\right| + C\right]' = \operatorname{tg} x.$$

Vzhledem k přítomnosti absolutní hodnoty v derivovaném výrazu musíme výpočet provést odděleně pro případy $\cos x > 0$ a $\cos x < 0$:[2]

---

[1] Vyjádřeno slovně *derivace neurčitého integrálu je rovna integrandu tohoto integrálu.*

[2] Možnost $\cos x = 0$ nemusíme uvažovat, taková x nepatří do definičního oboru integrandu.

$\underline{\cos x > 0}$

$$\left[-\ln|\cos x| + C\right]' = \left[-\ln\cos x + C\right]' = \left(-\ln\cos x\right)' + C' = -\frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right) = \operatorname{tg} x\,,$$

$\underline{\cos x < 0}$

$$\left[-\ln|\cos x| + C\right]' = \left[-\ln\left(-\cos x\right) + C\right]' = \left[-\ln\left(-\cos x\right)\right]' + C' = -\frac{1}{-\cos x}\left[-\left(-\sin x\right)\right] = \operatorname{tg} x\,.$$

Pro obě možnosti je tedy rovnost $[-\ln|\cos x| + C]' = \operatorname{tg} x$ ověřena, a platí proto i rovnost ze zadání příkladu.

PŘÍKLAD 3

Pro zadané funkce *f* a *g* ověřte pomocí definice primitivní funkce platnost rovnosti $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Někdy bývá vzorec s integrály, který máme ověřit, dosti obecný. Postup výpočtu je ale stejný jako v kterémkoliv jiném, zcela konkrétním zadání. Tak například nyní máme podle definice primitivní funkce ověřit platnost rovnosti

$$\left[f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f'(x)g(x)\ .$$

To ale nebude vůbec těžké, vezmeme-li si na pomoc větu o derivování součinu a uvědomíme-li si, že podle definice neurčitého integrálu platí $[\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x]' = f(x)g'(x)$:

$$\left[f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[f(x)g(x)\right]' - \left[\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\right]' =$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 - 3

1. Pomocí definice primitivní funkce prověřte platnost všech vzorců uvedených v tabulkách kapitol 3.1 a 3.2 *Breviáře*.

2. Pomocí definice primitivní funkce prověřte platnost následujících vzorců

a) $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$,[3]

b) $\int\left[a f(x)\right]\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$, a je zadaná konstanta,

●c) $\int g\left(f(x)\right)f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(x))$, kde $G(y) = \int g(y)\,\mathrm{d}y$.[4]

[3] Bod (a) a (b) viz též kapitola 3.1 *Breviáře*.
[4] Viz též kapitola 3.1 *Breviáře*.

PŘÍKLAD 4

Vypočítejte $\int\left(8x^4-\pi x^2+e\right)\mathrm{d}x$.

Řešení

Integrovaná funkce je součtem (rozdílem) konstantních násobků přirozených mocnin x^n. Při výpočtu integrálu tedy využijeme vzorec $\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ a věty o integrálu součtu (rozdílu) a konstantním násobku funkce (viz *Breviář* kap. 3.1):[5]

$$\int\left(8x^4-\pi x^2+e\right)\mathrm{d}x=\int 8x^4\,\mathrm{d}x-\int \pi x^2\,\mathrm{d}x+\int e\,\mathrm{d}x=8\int x^4\,\mathrm{d}x-\pi\int x^2\,\mathrm{d}x+e\int 1\,\mathrm{d}x=$$
$$=8\tfrac{1}{4+1}x^{4+1}-\pi\tfrac{1}{2+1}x^{2+1}+e\tfrac{1}{0+1}x^{0+1}+C=\underline{\underline{\tfrac{8}{5}x^5-\tfrac{\pi}{3}x^3+ex+C}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 4

1. Vypočítejte následující neurčité integrály. Vždy určete jejich definiční obor.

a) $\int\left(a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-4}x^{n-4}\right)\mathrm{d}x$ c) $\int\left(\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$ e) $\int\left(x^2+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$ g) $\int\ln\left(\pi x^4\right)\mathrm{d}x$

•b) $\int\left(\sum_{n=1}^{N}a_nx^n\right)\mathrm{d}x$ [6] d) $\int\left(2^x+3^x+4^x\right)\mathrm{d}x$ f) $\int\left(\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$ h) $\int\ln\left(3/x^2\right)\mathrm{d}x$

PŘÍKLAD 5

Vypočítejte $\int\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení

Často je možno dojít k podobně jednoduchým integrálům, se kterými jsme se setkali v příkladu 4 a navazujících cvičeních, pokud komplikovaný integrand vhodně upravíme. Tak například v našem případě vedou k významnému zjednodušení úpravy [7]

$$\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}}=\frac{\sin x}{\cos x}\left|\cos x\right|,$$

pomocí kterých integrál ze zadání příkladu převádíme na integrál $\int\frac{\sin x}{\cos x}\left|\cos x\right|\mathrm{d}x$. Ani absolutní hodnoty v novém integrandu se nemusíme zaleknout, znamená jen, že celý výpočet budeme muset rozdělit do dvou souběžných větví pro $\cos x>0$ a $\cos x<0$:

$\underline{\cos x>0}$: $\int\frac{\sin x}{\cos x}\left|\cos x\right|\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C_+$,

---

[5] Ludolfovo i Eulerovo číslo jsou konstanty.

[6] V cvičeních (a) a (b) označují symboly a_k blíže neurčené konstanty.

[7] Začít bychom ale vždy měli určením definičního oboru integrandu (a tím i hledané primitivní funkce). Integrand ze zadání tohoto příkladu má smysl, je-li cos$x$ nenulový. Samotné x nesmí být tedy rovno žádnému z lichých násobků $\pi/2$.

$\underline{\cos x > 0}$: $\int \frac{\sin x}{\cos x}|\cos x|\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C_-$.

Můžeme tedy uzavřít konstatováním, že

$$\underline{\underline{\int \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\cos x + C_+ & \text{pro } \cos x > 0 \\ +\cos x + C_- & \text{pro } \cos x > 0 \end{cases}}}.$$

Integrační konstanty mohou být v obou dílčích výsledcích [8] obecně různé – body, v nichž je $\cos x = 0$, nepatří totiž do definičního oboru integrandu, a tedy ani do definičního oboru získané primitivní funkce. Definiční obor výsledku integrování však lze, po provedených úpravách, rozšířit na celou reálnou osu. Budeme-li požadovat, aby primitivní funkce byla na takto rozšířeném definičním oboru spojitá, musíme předpokládat její spojitost v bodech $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$-\cos\left[(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right] + C_+ = \cos\left[(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right] + C_-,$$

a tedy

$$C_+ = C_- .$$

V takovém případě budou obě integrační konstanty stejné a budeme moci psát

$$\int \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\cos x + C & \text{pro } \cos x > 0 \\ +\cos x + C & \text{pro } \cos x > 0 \end{cases}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 5

1. Vypočítejte následující neurčité integrály. Vždy určete jejich definiční obor.

a) $\int \frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ e) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$ i) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$ h) $\int \frac{\mathrm{cotg}x+\mathrm{tg}x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$ j) $\int |x|\,dx$

[8] Dokonce i různé pro různé intervaly, na nichž je cos$x$ kladný resp. záporný.