

## 6 Diferenciální operátory

### 6.1 Skalární a vektorové pole

#### Definice (skalární pole)

Funkci  $u \equiv u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definovanou v určité oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , nazýváme **skalárním polem**.

#### Poznámka

- Skalární pole přiřazuje každému bodu oblasti  $\Omega$  určitou číselnou hodnotu (skalár).
- Používá se také zápis  $u \equiv u(\mathbf{r})$ , kde vektor  $\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- V přírodních vědách je nejčastějším případem  $n = 3$ , kdy nezávislé proměnné  $x_1, x_2, x_3$  představují kartézské souřadnice  $x, y, z$ .
- Je zřejmé, že skalární pole můžeme parciálně derivovat podle jednotlivých proměnných stejně jako libovolnou matematickou funkcí více proměnných.

#### Definice (hladina skalárního pole)

Nadplochy<sup>1</sup>  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{konst.}$ , tj. nadplochy, na kterých je hodnota skalárního pole konstantní, nazýváme tzv. **hladinami** pole  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

#### Definice (vektorové pole)

Vektorovou funkci  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  reálných proměnných, definovanou v určité oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , nazýváme **vektorovým polem** ( $n$  proměnných)<sup>2</sup>.

#### Poznámka

- Vektorové pole přiřazuje každému bodu oblasti  $\Omega$  určitý vektor  $\mathbf{a}$ , který může mít libovolný počet složek. V dalším výkladu se však omezíme výlučně na *trojrozměrné vektory*, které lze psát ve tvaru  $\mathbf{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathbf{i} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathbf{j} + a_3(x_1, x_2, \dots, x_n)\mathbf{k}$ .  
Symboly  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  představují zde i dále v textu vektory ortonormální báze prostoru  $\mathbb{R}^3$ .
- Počet proměnných  $n$  (tj. dimenze prostoru, na kterém je vektorové pole definováno) bývá v praxi nejčastěji roven 1 nebo 3. Pro  $n = 1$  můžeme vektorové pole psát ve tvaru  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(t)$ , kde proměnná  $t$  mívá většinou význam času nebo délky oblouku křivky (pak se obvykle značí  $s$ ). V případě  $n = 3$  lze použít zápis  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ , kde  $x, y, z$  jsou kartézské souřadnice a  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  je polohový vektor.

#### Definice (vektorová čára)

Křivka, pro kterou platí, že tečna k ní má v každém jejím bodě směr vektoru vektorového pole v tomto bodě, se nazývá **vektorovou čarou** (také **síločarou**) vektorového pole.

#### Definice

**Derivací vektorového pole**  $\mathbf{a}(t)$  podle proměnné  $t$  rozumíme vektorové pole

$$\mathbf{a}'(t) \equiv \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_3}{dt}\mathbf{k} = a'_1\mathbf{i} + a'_2\mathbf{j} + a'_3\mathbf{k}.$$

<sup>1</sup> Termín nadplocha je zobecněním pojmu plochy, známého z 3-rozměrného prostoru.

<sup>2</sup> Viz též kap. 2.1.

**Poznámka**

- Derivují se všechny složky vektoru  $\mathbf{a}$  podle proměnné  $t$ , tzn. je nutné provést tři obyčejné derivace.
- Zde i dále v textu necháváme stranou podmínky existence derivací apod. Předpokládáme, že všechny potřebné vlastnosti námi uvažovaná pole mají.

**Příklad**

- Vektorové pole  $\mathbf{r}(t)$ , kde  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  je polohový vektor a  $t$  je čas, popisuje pohyb určitého bodu v čase.

Derivace  $\mathbf{r}'(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \mathbf{v}(t)$  představuje okamžitou rychlost tohoto bodu.

- Častým případem je vektorové pole  $\mathbf{r}(s)$ , kdy parametrem  $s$  je délka oblouku křivky, kterou opisuje koncový bod polohového vektoru  $\mathbf{r}$ . Vektor  $\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  pak představuje jednotkový tečný vektor uvedené křivky v každém jejím bodě.

**Věta**

Pro derivaci součtu, násobku skalárem, skalárního součinu a vektorového součinu vektorových polí *jedné proměnné* platí věty analogické větám pro skalární funkce:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}', \quad (k \cdot \mathbf{a})' = k \cdot \mathbf{a}', \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}', \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}'$$

**Důkaz**

Stačí rozepsat jednotlivá vektorová pole na složky a aplikovat věty o derivaci součtu a součinu skalárních funkcí.

**Poznámka**

Analogicky k definici (obyčejné) derivace vektorového pole jedné proměnné můžeme derivovat parciální derivace vektorového pole více proměnných.

$$\text{Např. } \frac{\partial \mathbf{a}(x, y, z)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{a}(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial a_1(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a_2(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial a_3(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{k} \text{ atd.}$$

## 6.2 Gradient

**Definice**

**Gradientem** skalárního pole  $u \equiv u(x, y, z)$  se nazývá vektorové pole

$$\text{grad } u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

kde  $x, y, z$  jsou kartézské souřadnice a  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  příslušné vektory ortonormální báze.

**Poznámka**

- Definici lze snadno zobecnit na případ  $n$  proměnných (viz kap. 2.3).
- Gradient je vektor, jehož složkami jsou parciální derivace skalárního pole podle jednotlivých souřadnic.

**Definice (potenciální pole)**

Existuje-li k vektorovému poli  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  takové skalární pole  $u(\mathbf{r})$ , že  $\mathbf{a} = \text{grad } u$ , pak vektorové pole  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  nazýváme **potenciálním** (také **konzervativním**), skalární pole  $u(\mathbf{r})$  **potenciálem** a hladiny tohoto pole **ekvipotenciálními plochami** (zkráceně **ekvipotenciálami**)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Viz též kap. 5.4.

**Věta**

Přírůstek  $du$  hodnoty skalárního pole  $u(x, y, z)$  při posunutí o infinitesimálně malý vektor  $d\mathbf{r} \equiv dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}$  se vypočte skalárním součinem  $du = \text{grad } u \cdot d\mathbf{r}$ .

**Důkaz**

Důkaz plyne z definice totálního diferenciálu funkce více proměnných<sup>1</sup>:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

**Poznámka**

- Větu můžeme snadno zobecnit na obecný případ  $n$  proměnných.
- Z uvedeného plyne, že *gradient skalárního pole je v každém bodě kolmý k jeho hladině*. Důkaz je jednoduchý:  $u = \text{konst.} \Leftrightarrow du = 0 \Leftrightarrow \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \text{grad } u \perp d\mathbf{r}$ . Jinak řečeno, siločáry potenciálního pole jsou vždy kolmé k jeho ekvipotenciálám.
- Z vyjádření skalárního součinu  $\text{grad } u \cdot d\mathbf{r} = \|\text{grad } u\| \cdot \|d\mathbf{r}\| \cdot \cos \alpha$  ( $\alpha$  je úhel mezi oběma vektory) je zřejmé, že pro konstantní délku  $\|d\mathbf{r}\|$  posunutí  $d\mathbf{r}$  dosáhne přírůstek  $du$  skalárního pole největší hodnoty tehdy, je-li vektor  $d\mathbf{r}$  rovnoběžný s gradientem a téhož směru ( $\alpha = 0$ ). Gradient má tedy v každém bodě skalárního pole *směr největšího růstu* tohoto pole. Naopak největšího úbytku pole dosáhneme pohybem ve směru opačném ke gradientu, nulové změny ve směrech kolmých ke gradientu<sup>2</sup>.

**Věta**

Pro gradient platí:

$$\text{grad } (u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v, \quad \text{grad } (u \cdot v) = u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u$$

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \cdot \text{grad } u, \quad \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}_0.$$

V poslední rovnici je  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  polohový vektor,  $r \equiv \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  jeho velikost a  $\mathbf{r}_0$  jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{r}$ .

**Důkaz**

Je triviální, stačí aplikovat základní věty platné pro derivace skalárních funkcí.

**Nabla operátor**

V praxi se (zejména v trojrozměrném případě) velmi často používá jiného značení gradientu s využitím tzv. **Hamiltonova operátoru nabla (nabla operátoru)**.

Tento operátor se značí  $\nabla$  a zavádí se takto:  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ . Je to vlastně *symbolický*

vektor, jehož složkami jsou *symboly* parciálních derivací podle jednotlivých proměnných podle kartézských souřadnic  $x, y, z$ . Gradient zapíšeme pomocí nabla operátoru takto:  $\text{grad } u \equiv \nabla u$ . Formálně se tento zápis dá číst jako násobení vektoru  $\nabla$  skalárem  $u$  (přičemž skalár je nestandardně zapsán až za vektorem).

<sup>1</sup> Více o totálním diferenciálu viz kap. 2.4.

<sup>2</sup> Viz také kap. 2.3 – derivace ve směru.

## 6.3 Divergence

### Definice

**Divergenci** vektorového pole  $\mathbf{a}(x, y, z)$  nazýváme skalární pole

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(x, y, z) \equiv \frac{\partial a_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_3(x, y, z)}{\partial z}.$$

### Poznámka

- Slovně řečeno, jedná se o součet tří parciálních derivací, kde první člen je derivací první složky vektorového pole podle první proměnné, druhý člen derivací druhé složky podle druhé proměnné a třetí člen derivací třetí složky podle třetí proměnné. V každém sčítanci tudíž index složky odpovídá pořadí (indexu) proměnné.
- I tuto definici lze snadno zobecnit pro případ  $n$  proměnných.
- Na základě *Gaussovy věty* integrálního počtu (viz kapitola 5.8) můžeme pro divergenci psát vyjádření  $\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$ . Plocha  $\Delta S$  je kladně orientovaná uzavřená plocha ohraničující objem  $\Delta V$ , který obsahuje zvolený bod. Hodnota divergence v určitém bodě představuje tok vektoru  $\mathbf{a}$  z infinitezimálního objemu  $\Delta V$  dělený tímto objemem neboli tok vektoru  $\mathbf{a}$  z jednotkového objemu v daném bodě.
- Jednoduchý fyzikální model. Jestliže vektorové pole  $\mathbf{a}(x, y, z)$  charakterizuje rychlost proudění kapaliny, pak  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  v určitém bodě udává objemové množství kapaliny, které vyteče z jednotkového objemu za jednotku času, tzn. vydatnost tohoto jednotkového objemu jakožto **zřídla** kapaliny. Pole, pro které platí identity (tj. v každém jeho bodě)  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  (např. pole popisující nestlačitelnou kapalinu), se nazývá **nezřídlové pole**. Do libovolného objemu ohraničeného uzavřenou plochou stejné množství kapaliny vtéká i vytéká. Jestliže alespoň v jednom bodě platí  $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$ , pak pole  $\mathbf{a}$  nazýváme **zřídlovým**.
- Pomocí nabla operátoru lze zapsat divergenci jako symbolický skalární součin  $\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$ .

### Věta

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}, \quad \operatorname{div}(u \cdot \mathbf{a}) = u \cdot \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u, \quad \operatorname{div} \mathbf{r} = 3.$$

### Důkaz

Rozepsáním vektorů na jednotlivé složky a použitím pravidel pro derivaci součtu a součinu.

## 6.4 Rotace

### Definice

**Rotaci** vektorového pole  $\mathbf{a}(x, y, z)$  nazýváme vektorové pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

### Poznámka

- Stačí si zapamatovat pouze tvar první složky, ostatní složky dostaneme cyklickou záměnou indexů a proměnných.
- Tuto definici není možné zobecnit na případ jiného počtu proměnných než tří.
- Na základě *Stokesovy věty* integrálního počtu (viz kapitola 5.8) můžeme pro rotaci psát vyjádření

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} \equiv \|\operatorname{rot} \mathbf{a}\| \cdot \cos \alpha = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}.$$

Plocha  $\Delta S$  je orientovaná rovinná plocha obsahující zvolený bod a ohraničená kladně orientovanou křivkou  $\Delta l$ , úhel  $\alpha$  je úhel mezi vektorem  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  a normálou k ploše  $\Delta S$ . Vzorec je třeba chápat tak, že hodnota *kolmé složky* divergence k infinitezimální rovině plošce  $\Delta S$  (jejíž poloha je určena jejím normálovým vektorem) je dána podílem cirkulace vektoru  $\mathbf{a}$  po ohraničující křivce

$\Delta l$  a velikosti plochy  $\Delta S$ . Jinak řečeno, směr a orientace vektoru  $\text{rot } \mathbf{a}$  ve zvoleném bodě odpovídají směru a orientaci normály k *jednotkové* (dostatečně malé) plošce  $\Delta S$ , jejíž poloha (sklon) maximalizuje cirkulaci vektoru  $\mathbf{a}$  po její hraniční křivce (tj. veličinu  $\oint_{\Delta} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ ). Velikost vektoru  $\text{rot } \mathbf{a}$  je dána maximální hodnotou uvedené cirkulace.

- V modelu proudící kapaliny (viz divergence) vektor  $\text{rot } \mathbf{a}$  určuje směr osy, kolem které se kapalina v okolí uvažovaného bodu otáčí, a jeho velikost je rovna dvojnásobku rychlosti otáčení (v obloukové míře). Body, ve kterých je  $\text{rot } \mathbf{a} \neq 0$ , označujeme jako **víry**. Pole, pro které platí identicky (tj. v každém jeho bodě)  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ , se nazývá **nevírové pole**. Pole, v jehož alespoň jednom bodě je  $\text{rot } \mathbf{a} \neq 0$ , nazýváme **vírovým polem**.
- Pomocí nabla operátoru lze zapsat divergenci jako symbolický vektorový součin  $\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ .

### Věta

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \text{rot } \mathbf{a} + \text{rot } \mathbf{b}, \quad \text{rot}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } u, \\ \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}, \quad \text{rot } \mathbf{r} = 0.\end{aligned}$$

### Důkaz

Důkaz je obdobný jako u výše uvedených vzorců pro divergenci.

## 6.5 Laplaceův operátor

### Definice

Laplaceovým operátorem rozumíme symbolický operátor

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

### Poznámka

- Aplikace Laplaceova operátoru na skalární pole  $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . Výsledkem je skalární pole.
- Definici je možné zobecnit na případ  $n$  proměnných.
- Aplikace Laplaceova operátoru na vektorové pole  $\Delta \mathbf{a} \equiv \mathbf{i}\Delta a_1 + \mathbf{j}\Delta a_2 + \mathbf{k}\Delta a_3$ . Výsledkem je vektorové pole, jehož každá složka je dána „skalární“ aplikací Laplaceova operátoru na stejně indexovanou složku výchozího pole.
- Výraz  $\Delta u$  se místo dlouhého „Laplaceův operátor aplikovaný na pole  $u$ “ obvykle zkracuje na „Laplace  $u$ “ apod. Čtení „delta  $u$ “ je zde zcela nepřipustné, neboť je vyhrazeno pro přírůstek veličiny  $u$ . Stejně grafické označení v praxi nevádí, neboť z kontextu je vždy jasné, který případ nastává.
- Laplaceův operátor nemá tak názorný význam jako např. divergence nebo rotace, ale uplatňuje se značně v přírodních vědách, např. v elektřině a magnetismu, v nauce o vlnění, v rovnicích pro difúzi atd.
- Laplaceův operátor lze také vyjádřit pomocí nabla operátoru, a to jako formální skalární součin nabla operátoru sama se sebou  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ . Z důvodu ortonormality báze  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  totiž platí

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \equiv \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

### Věta

$$\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v, \quad \Delta(u \cdot v) = v\Delta u + u\Delta v + 2 \cdot \text{grad } u \cdot \text{grad } v, \quad \Delta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Delta \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}, \quad \Delta \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} = 0.$$

### Důkaz

Důkaz je opět velmi jednoduchý, přenecháváme jej čtenáři.

## 6.6 Vlastnosti diferenciálních operátorů

### Linearita operátorů

#### Věta

Všechny uvedené diferenciální operátory (gradient, divergence, rotace, Laplaceův operátor, nabla operátor) jsou lineární, tzn. homogenní (pro  $k$ -násobný argument obdržíme  $k$ -násobek hodnoty pro argument) a aditivní (pro součet argumentů obdržíme součet hodnot pro jednotlivé argumenty).

#### Důkaz

Plyne z linearity derivace.

### Vyjádření operátorů pomocí operátoru nabla

gradient	$\text{grad } u = \nabla \cdot u$	součin vektoru $\nabla$ a skaláru $u$
divergence	$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$	skalární součin vektoru $\nabla$ a vektoru $\mathbf{a}$
rotace	$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$	vektorový součin vektoru $\nabla$ a vektoru $\mathbf{a}$
Laplaceův operátor	$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$	skalární součin vektoru $\nabla$ se sebou samým

### Operátorové identity

#### Věta

$$\begin{aligned} \text{div grad } u &= \Delta u, \quad \text{grad div } \mathbf{a} = \text{rot rot } \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}, \quad \Delta \text{grad } u = \text{grad } \Delta u, \quad \Delta \text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \Delta \mathbf{a}, \\ \text{rot grad } u &= \mathbf{0}, \quad \text{div rot } \mathbf{a} = 0. \end{aligned}$$

#### Důkaz

Přenecháváme čtenáři jako cvičení. Stačí aplikovat definice jednotlivých operátorů.

#### Poznámka

- Poslední dvě identity vyjadřují důležitý poznatek, že pole  $\text{grad } u$  (potenciální pole) je vždy nevírové (jeho rotace je identicky rovna nule) a pole  $\text{rot } \mathbf{a}$  je nutně nezřídlové (jeho divergence je identicky nulová). Toto tvrzení platí za určitých, značně obecných podmínek<sup>1</sup> také obráceně, tzn. je-li nějaké vektorové pole v určité oblasti  $\Omega$  nevírové ( $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ), musí být gradientem nějakého skalárního pole ( $\mathbf{a} = \text{grad } u$ ), a je-li pole v  $\Omega$  nezřídlové ( $\text{div } \mathbf{a} = 0$ ), musí být rotací nějakého vektorového pole ( $\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{b}$ ).
- Uvedené identity můžeme názorně zdůvodnit vyjádřením vystupujících operátorů pomocí nabla operátoru a použitím jednoduchých pravidel pro skalární a vektorový součin. Např. v předposlední identitě výraz  $\text{rot grad } u$  nabývá tvaru  $\nabla \times (\nabla u)$ , který můžeme přepsat na  $(\nabla \times \nabla)u$  (veličina  $u$  zde hraje roli skaláru). Protože vektorový součin dvou vektorů téhož směru je roven nulovému vektoru, je  $\nabla \times \nabla = \mathbf{0}$ , a tedy  $(\nabla \times \nabla)u = \mathbf{0}u = \mathbf{0}$ . Obdobně v poslední identitě výraz  $\text{div rot } \mathbf{a}$  přepíšeme na  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})$ . Vektorový součin  $\mathbf{b} \equiv \nabla \times \mathbf{a}$  je, jak známo, kolmý k oběma činitelům, speciálně k (symbolickému) vektoru  $\nabla$ . To ovšem znamená, že skalární součin  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ , neboť skalární součin dvou navzájem kolmých vektorů je z definice nulový.

<sup>1</sup> Uvažovaná oblast  $\Omega$  musí být jednoduše souvislá.

## 6.7 Vyjádření diferenciálních operátorů v křivočarých souřadnicích

Níže shrnujeme základní vzorce nezbytné pro použití nejdůležitějších vektorových diferenciálních operátorů (gradient, divergence, rotace a Laplaceův operátor) ve vybraných křivočarých souřadnicových soustavách<sup>1</sup>. Podrobnosti může čtenář nalézt např. v příručce Rektorysové [5].

### Polární souřadnice v rovině

Označme vektory lokální křivočaré báze polárních souřadnic symboly  $\mathbf{e}_r$  a  $\mathbf{e}_\varphi$ . Dále necht'  $f$  je diferencovatelná funkce,  $f(r, \varphi)$ , a  $\mathbf{A}$  diferencovatelné vektorové pole,  $\mathbf{A}(r, \varphi)$ , které rozkládáme v každém bodě roviny do lokální křivočaré báze  $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ .

Pak platí

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

### Válcové souřadnice v prostoru

Vektory lokální křivočaré báze válcových souřadnic označme symboly  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  a  $\mathbf{e}_z$ . Podobně jako výše necht' je  $f$  diferencovatelná funkce,  $f(r, \varphi, z)$ , a  $\mathbf{A}$  diferencovatelné vektorové pole,  $\mathbf{A}(r, \varphi, z)$ . I nyní toto pole rozkládáme v každém bodě prostoru do lokální křivočaré báze:  $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$ .

Pak platí

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

<sup>1</sup> Viz též appendix A5.

## Kulové souřadnice v prostoru

Označme i nyní vektory lokální křivočaré báze  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  a  $\mathbf{e}_\theta$ . Dále necht'  $f$  je opět diferencovatelná funkce,  $f(r, \varphi, \theta)$ , a  $\mathbf{A}$  diferencovatelné vektorové pole,  $\mathbf{A}(r, \varphi, \theta)$ , jehož rozklad do lokální křivočaré báze je dán jako  $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_\theta \mathbf{e}_\theta$ .

Pak platí

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) \mathbf{e}_\varphi, \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

## Obecné ortogonální souřadnice

Jednotkové vektory lokální křivočaré ortogonální<sup>1</sup> báze válcových souřadnic označme symboly  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  a  $\mathbf{e}_3$ . Podobně jako výše necht' je  $f$  diferencovatelná funkce,  $f(q_1, q_2, q_3)$ , a  $\mathbf{A}$  diferencovatelné vektorové pole,  $\mathbf{A}(q_1, q_2, q_3)$ . Toto pole rozkládáme v každém bodě prostoru do lokální křivočaré ortogonální báze:  $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ . Infinitesimálně malé posunutí  $d\mathbf{r}$  můžeme obecně vyjádřit ve tvaru  $d\mathbf{r} = h_1 dq_1 + h_2 dq_2 + h_3 dq_3$ , kde veličiny  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  jsou obecně funkcemi souřadnic  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  a nazývají se **Laméovy koeficienty**.

Pak platí<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3}, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right], \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}, \\ \Delta f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right).\end{aligned}$$

<sup>1</sup> Odtud název „ortogonální souřadnice“. Bližší o ortogonálních bázích viz kap. A4.1 a o ortogonálních souřadnicích viz kap. A5.

<sup>2</sup> Ve výrazu pro rotaci svislé čáry označují determinant – viz kap. A4.3.