

5 Křivkové a plošné integrály

5.1 Křivky

Poznámka

V této kapitole se budeme zabývat obecnými křivkami v \mathbb{R}^n . Vždy však můžeme položit $n = 2$ či $n = 3$ a přejít tak k speciálním případům roviny či trojrozměrného prostoru, které jsou v aplikacích bezesporu nejvýznamnější.

Definice

Pod **spojitou křivkou** v \mathbb{R}^n budeme rozumět spojitě zobrazení $\varphi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$. Obraz intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ v tomto zobrazení nazveme **geometrickým obrazem** křivky φ a budeme jej označovat symbolem $\langle \varphi \rangle$.

Poznámka

Spojitá křivka v \mathbb{R}^n je zadána n -ticí spojitých reálných funkcí $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ definovaných na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Jedná se tedy o spojitou vektorovou funkci (viz kap. 1.7). Protože jsou jednotlivé body křivky popsány pomocí reálného parametru t , hovoříme též o **parametrickém zadání křivky**. Všimněte si též, že různým křivkám mohou odpovídat stejné geometrické obrazy.

V dalším textu se budeme zabývat křivkami, které mají na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nenulové spojitě první derivace – tyto křivky se obvykle nazývají **křivkami třídy C_1** – nebo alespoň po částech nenulové spojitě první derivace – **křivky po částech třídy C_1** . Navíc budeme předpokládat, že příslušná vektorová funkce je na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ prostá¹. Tyto vlastnosti již nebudeme v dalším výkladu explicitně zdůrazňovat. Pod křivkou budeme níže vždy (!) rozumět spojitou křivku alespoň po částech třídy C_1 .

Definice

Křivku φ nazveme **uzavřenou**, splývá-li její počáteční bod s bodem koncovým, tj. $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Definice

Pod **tečnou** ke křivce φ v bodě $\mathbf{x}_0 = [\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)]$ rozumíme přímku $p: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\tau}(t - t_0)$, která prochází bodem \mathbf{x}_0 a splňuje

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \mathbf{x}(t)}{t - t_0} = \mathbf{0}.$$

Vektor $\boldsymbol{\tau}$ nazveme **tečným vektorem** ke křivce φ v bodě \mathbf{x}_0 .

Poznámka

Má-li křivka v bodě $\mathbf{x}_0 = [\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)]$ nenulovou první derivaci, má v něm i tečnu. Její směrový vektor $\boldsymbol{\tau}$ je roven vektoru $[\dot{\varphi}_1(t_0), \dots, \dot{\varphi}_n(t_0)]^2$, kde tečkou nad písmenem označujeme první derivaci podle parametru t .

¹ Připouštíme tedy $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

² Použijeme-li v parametrické rovnici pro tečnu p jiného parametru, $p: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{\tau}}s$, kde $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ pro $s = 0$, bude její směrový vektor $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ (a tedy i nový tečný vektor ke křivce φ) obecně libovolným reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{\tau} \equiv [\dot{\varphi}_1(t_0), \dots, \dot{\varphi}_n(t_0)]$.

Věta (o skládání a inverzi křivek)

Nechť φ a ψ jsou křivky v \mathbb{R}^n definované na intervalech $\langle \alpha, \beta \rangle$ a $\langle \beta, \gamma \rangle$, které jsou navíc po částech třídy C_1 . Nechť dále platí $\varphi(\beta) = \psi(\beta)$. Pak vektorová funkce $\chi: \langle \alpha, \gamma \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ definovaná předpisem

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \varphi(t) \quad \text{pro } t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \chi(t) &= \psi(t) \quad \text{pro } t \in \langle \beta, \gamma \rangle\end{aligned}$$

a dále též vektorová funkce $\tilde{\varphi}: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ definovaná předpisem

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\alpha + \beta - t)$$

jsou křivky po částech třídy C_1 .

Definice

Křivku χ nazýváme *křivkou složenou* z křivek φ a ψ a používáme pro ni též symbolický zápis $\chi = \varphi \circ \psi$. Křivku $\tilde{\varphi}$ pak nazýváme *křivkou opačnou (inverzní)* ke křivce φ .

Poznámka

Při pohybu po složené křivce probíháme nejdříve všemi body první křivky a následně i všemi body křivky druhé. Opačná křivka je totožná s křivkou původní, ovšem probíhanou pozpátku.

Všimněte si též vztahů, které platí v případě skládání a invertování křivek pro jejich geometrické obrazy:

$$\begin{aligned}\langle \varphi \circ \psi \rangle &= \langle \varphi \rangle \cup \langle \psi \rangle, \\ \langle \tilde{\varphi} \rangle &= \langle \varphi \rangle.\end{aligned}$$

5.2 Křivkový integrál prvního druhu

Definice (křivkový integrál prvního druhu pro křivky C_1)

Nechť $\varphi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka třídy C_1 a $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reálná funkce n reálných proměnných, jež je spojitá na nějakém okolí každého bodu geometrického obrazu $\langle \varphi \rangle$. Pak předpisem

$$\int_{\varphi} f d\varphi \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(\varphi(t)) \left\| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right\| \right) dt$$

definujeme *křivkový integrál prvního druhu* funkce f po křivce φ .¹

Je-li křivka φ uzavřená, používáme zpravidla pro odpovídající křivkový integrál symbol $\oint_{\varphi} f d\varphi$.

¹ V integrandu na pravé straně definičního vztahu označujeme symbolem $\|\mathbf{a}\|$ eukleidovskou normu vektoru

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Platí tedy $\left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (d\varphi_i / dt)^2}$.

Poznámka

Formálním porovnáním pravé a levé strany definičního vztahu pro křivkový integrál prvního druhu získáme symbolickou rovnost $d\varphi = \|d\Phi/dt\|dt$ nebo též $d\varphi = \|d\Phi\|$. Diferenciál $d\varphi$ na levé straně odpovídá tedy délce infinitezimálního oblouku křivky Φ na intervalu $\langle t, t+dt \rangle$ a integrál

$$\int_{\Phi} 1 d\varphi \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d\Phi}{dt}(t) \right\| dt$$

délce křivky Φ .

Věta (aditivita křivkového integrálu prvního druhu vůči skládání křivek)

Nechť křivky Φ a Ψ jsou na intervalech $\langle \alpha, \beta \rangle$ a $\langle \beta, \gamma \rangle$ třídy C_1 a splňují $\Phi(\beta) = \Psi(\beta)$.

Pak platí

$$\int_{\chi=\Phi\circ\Psi} f d\chi = \int_{\Phi} f d\varphi + \int_{\Psi} f d\psi.$$

Definice (křivkový integrál prvního druhu pro křivky po částech C_1)

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce spojitá na nějakém okolí každého bodu geometrického obrazu křivky $\Phi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je na tomto intervalu po částech třídy C_1 . Existuje tedy takové dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, že Φ má na každém dělicím intervalu (t_{k-1}, t_k) , $k = 1, \dots, m$, nenulovou spojitou první derivaci. Pak pod **křivkovým integrálem prvního druhu** funkce f po křivce Φ rozumíme

$$\int_{\Phi} f d\varphi \equiv \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f(\Phi(t)) \left\| \frac{d\Phi}{dt}(t) \right\| \right) dt.$$

Poznámka

Aditivita integrálu 1. druhu pro křivky třídy C_1 zaručuje, že výše uvedená definice je korektní. Jako dělicí body t_k musíme vždy vybrat především ty, v nichž křivka Φ nemá spojitou první derivaci. Přidáme-li k nim i takové, v nichž tato křivka spojitou první derivaci má, pravá strana výše uvedené rovnosti se díky zmíněné aditivitě nezmění.

Poznámka

V následujících větách je $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (popř. i $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) spojitá funkce definovaná pro každý bod obrazu uvažovaných křivek na nějakém jeho okolí. Křivky jsou alespoň po částech třídy C_1 .

Věta (nezávislost křivkového integrálu prvního druhu na parametrizaci)

Nechť dvě křivky $\Phi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\Psi: \langle \gamma, \delta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ mají stejný obraz a navíc nechť existuje vzájemně jednoznačné a spojitě diferencovatelné zobrazení $h: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle \gamma, \delta \rangle$ takové, že $\Phi(t) = \Psi(h(t))$. Pak platí

$$\int_{\Phi} f d\varphi = \int_{\Psi} f d\psi.$$

Změna parametrizace křivky tedy hodnotu křivkového integrálu prvního druhu nemění. Speciálně pro opačnou křivku platí

$$\int_{\Phi} f d\varphi = \int_{\tilde{\Phi}} f d\tilde{\varphi}.$$

Věta (linearita křivkového integrálu prvního druhu)

$$\int_{\varphi} c f d\varphi = c \int_{\varphi} f d\varphi, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\varphi} (f \pm g) d\varphi = \int_{\varphi} f d\varphi \pm \int_{\varphi} g d\varphi.$$

Poznámka

Křivkové integrály prvního druhu je možno definovat nejen pro skalární funkce, ale i pro vektorová pole – a to po složkách:

$$\int_{\varphi} \mathbf{f} d\varphi \equiv \left[\int_{\varphi} f_1 d\varphi, \dots, \int_{\varphi} f_n d\varphi \right].$$

5.3 Křivkový integrál druhého druhu

Křivkové integrály prvního a druhého druhu jsou si velmi blízké. Níže si zejména všimněte, jak mnohé věty formulované pro integrály druhého druhu odpovídají větám předcházející kapitoly.

Definice

Nechť $\varphi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka třídy C_1 a $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorové pole spojitě na nějakém okolí každého bodu geometrického obrazu $\langle \varphi \rangle$. Pak předpisem

$$\int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \left(\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) dt$$

definujeme **křivkový integrál druhého druhu** pole \mathbf{f} po křivce φ .

Je-li křivka φ uzavřená, používáme pro obvykle odpovídající křivkový integrál symbol

$$\oint_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi.$$

Poznámka

V definičním vztahu stojí v závorce integrandu na pravé straně skalární součin dvou vektorů z \mathbb{R}^n , tedy

$$\mathbf{f} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \equiv \sum_{i=1}^n f_i \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Formálním porovnáním pravé a levé strany definičního vztahu pro křivkový integrál druhého druhu získáme symbolickou rovnost $d\varphi = (d\varphi/dt)dt$. Infinitesimální vektor $d\varphi$ je tedy v každém bodě tečný ke křivce φ a míří do směru, v němž hodnota parametru t roste. Jeho velikost odpovídá navíc s přesností do prvního řádu délce oblouku této křivky na intervalu $\langle t, t+dt \rangle$. Vektor $d\varphi$ můžeme proto s přesností do prvního řádu interpretovat jako infinitesimální orientovaný oblouk křivky φ na intervalu $\langle t, t+dt \rangle$.

Poznámka

Velmi názorná je fyzikální interpretace křivkového integrálu druhého druhu. Chápeme-li totiž křivku φ jako trajektorii popisovanou hmotným bodem v prostoru (pak ovšem $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$) a vektorové pole \mathbf{f} jako pole vnějších sil na tento bod působících, pak odpovídající křivkový integrál není nic jiného než práce vykonaná těmito silami.

Definice

Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorové pole spojitě na nějakém okolí každého bodu geometrického obrazu křivky $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je na tomto intervalu po částech třídy C_1 . Existuje tedy takové dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, že φ má na každém dělicím intervalu (t_{k-1}, t_k) , $k = 1, \dots, m$, nenulovou spojitou první derivaci. Pak pod **křivkovým integrálem druhého druhu** pole \mathbf{f} po křivce φ rozumíme

$$\int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi \equiv \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi}{dt}(t) \right) dt.$$

Poznámka

V následujících větách je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (popř. i $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) spojitě vektorové pole definované pro každý bod obrazu uvažovaných křivek na nějakém jeho okolí. Křivky jsou alespoň po částech třídy C_1 .

Věta (závislost křivkového integrálu druhého druhu na parametrizaci)

Nechť dvě křivky $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\psi : \langle \gamma, \delta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ mají stejný obraz a navíc nechť existuje vzájemně jednoznačné a spojitě diferencovatelné zobrazení $h : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle \gamma, \delta \rangle$ takové, že $\varphi(t) = \psi(h(t))$. Pak platí

$$\int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi = \pm \int_{\psi} \mathbf{f} \cdot d\psi,$$

kde kladné znaménko platí pro rostoucí h a záporné znaménko pro h klesající.

Poznámka

Předcházející tvrzení je možno vyslovit sice méně přesně, ale o to názorněji:

Pro dvě pouze parametrizací lišící se křivky se odpovídající křivkové integrály druhého druhu liší pouze znaménkem. Při souhlasné orientaci obou křivek jsou si oba integrály rovny.

Speciálně pro zadanou křivku a křivku k ní opačnou můžeme psát

$$\int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi = - \int_{\tilde{\varphi}} \mathbf{f} \cdot d\tilde{\varphi}.$$

Věta (aditivita křivkového integrálu druhého druhu vůči skládání křivek)

Nechť křivky φ a ψ definované na intervalech $\langle \alpha, \beta \rangle$ a $\langle \beta, \gamma \rangle$ splňují $\varphi(\beta) = \psi(\beta)$. Existuje-li pravá strana, platí

$$\int_{\chi=\varphi\circ\psi} \mathbf{f} \cdot d\chi = \int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi + \int_{\psi} \mathbf{f} \cdot d\psi.$$

Věta (linearita křivkového integrálu druhého druhu)

Existují-li pravé strany, platí

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} c\mathbf{f} \cdot d\varphi &= c \int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi, \quad c \in \mathbb{R}, \\ \int_{\varphi} (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot d\varphi &= \int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi + \int_{\varphi} \mathbf{g} \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

5.4 Potenciál vektorového pole

V této kapitole se budeme zabývat obecnými vektorovými poli na \mathbb{R}^n . V technických a přírodovědných aplikacích jsou sice nejzajímavější případy $n = 2$ a $n = 3$ (vektorová pole v rovině a prostoru), obecná teorie ale není o mnoho komplikovanější než v obou speciálních případech. Pokud nebude zdůrazněno jinak, budeme pracovat s jednou spojitě diferencovatelnými poli na nějaké oblasti (souvislé otevřené množině¹) z \mathbb{R}^n .

Potenciál

Definice

Potenciálem vektorového pole $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme takovou reálnou funkci $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Vektorové pole, které má potenciál, nazveme **potenciální**.

Poznámka

Vztah mezi vektorovým polem \mathbf{F} a jeho potenciálem U můžeme zkráceně zapsat pomocí operátoru gradientu² $\mathbf{F} = \nabla U$. V přírodních vědách (např. ve fyzice) se obvykle používá poněkud odlišná definice $\mathbf{F} = -\nabla U$.

Poznámka

Obecné vektorové pole nemusí mít žádný potenciál. Pokud jej na nějaké oblasti má, je tento potenciál určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Věta (nutná podmínka potenciálnosti vektorového pole)

Má-li spojitě diferencovatelné vektorové pole \mathbf{F} potenciál na oblasti A , platí pro každé \mathbf{x} z této oblasti a pro každou dvojici $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$,³

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Poznámka

Uvědomme si, že výše uvedené podmínky pro derivace složek pole jsou pouze podmínkami nutnými. Samy o sobě nestačí k tomu, aby vektorové pole \mathbf{F} vůbec nějaký potenciál mělo⁴.

Nutnou podmínkou potenciálnosti vektorového pole v rovině je jednoduchý (a jediný) vztah

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

V případě trojrozměrných polí v prostoru je možno přepsat trojici nutných podmínek potenciálnosti pole \mathbf{F} ,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y},$$

do formálně elegantnějšího tvaru $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, kde rot je vektorový operátor rotace¹.

¹ Blíže vysvětlení použitých pojmů můžete najít v Apendixu A2.

² Viz též kapitoly 2.3 a 6.2.

³ Platnost této věty vyplývá okamžitě ze záměnnosti druhých derivací potenciálu pole \mathbf{F} .

⁴ Níže v této kapitole je ukázáno, že v rovině a v prostoru jsou tyto podmínky postačující, jsou-li splněny na jednoduše souvislé oblasti.

Nalezení potenciálu vektorového pole v rovině

Budiž $\mathbf{F} = [F_x(x, y), F_y(x, y)]$ spojitě diferencovatelné vektorové pole definované na nějaké oblasti v rovině. Jeho potenciál, pokud existuje, je definován vztahy

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{a} \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Levé strany těchto vztahů jsou zadané funkce, potenciál můžeme proto získat jejich integrací.

Z prvního vztahu máme

$$U(x, y) = \int F_x(x, y) dx + C(y),$$

kde naznačený neurčitý integrál počítáme tak, že na nezávislou proměnnou y pohlížíme během integrace jako na konstantu. Explicitně uvedená integrační konstanta C může proto rovněž na y záviset.

Derivováním takto získaného vztahu podle y dostaneme

$$F_y(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int F_x(x, y) dx + C(y) \right] = \int \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial C(y)}{\partial y}$$

a po úpravách

$$\frac{\partial C(y)}{\partial y} = F_y(x, y) - \int \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} dx.$$

Má-li pole \mathbf{F} potenciál, závisí pravá strana poslední rovnosti pouze na nezávislé proměnné y , a neznámou funkci $C(y)$ můžeme v takovém případě snadno získat (s přesností až na aditivní konstantu, tentokrát již skutečnou) prostou integrací. Pokud ovšem pravá strana závisí i na nezávislé proměnné x , potenciál vektorového pole \mathbf{F} neexistuje.

Pro vícerozměrná vektorová pole funguje naprosto stejný postup, který je snad jen s rostoucím n stále pracnější.

Určení potenciálu pomocí křivkových integrálů

Věta

Je-li vektorové pole $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelné na oblasti $A \subset \mathbb{R}^n$, jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- \mathbf{F} má potenciál,
- pro každou uzavřenou křivku $\varphi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow A$ platí $\oint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot d\varphi = 0$,

¹ Viz kapitola 6.4.

- pro každé dvě křivky $\varphi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow A$ a $\psi: \langle \gamma, \delta \rangle \rightarrow A$ splňující $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$ a $\varphi(\beta) = \psi(\delta)$ platí $\int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot d\varphi = \int_{\psi} \mathbf{F} \cdot d\psi$.

Potenciál U pole \mathbf{F} pak lze psát ve tvaru

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot d\varphi,$$

kde φ je libovolná křivka spojující předem zvolený (libovolný ovšem) bod $\mathbf{x}_0 \in A$ s bodem \mathbf{x} .

Poznámka

Ve třetí odřážce předcházející věty vystupují křivky se společnými počátečními a koncovými body. V této odřážce se tedy říká, že uvedené křivkové integrály nezávisí na samotných křivkách, ale jen na jejich okrajových bodech.

Z této podmínky dále vyplývá, že integrální předpis pro potenciál je korektní. Hodnota $U(\mathbf{x})$ nezávisí na zvolené křivce φ , ale jen na jejím pevně, leč libovolně zvoleném počátečním bodě \mathbf{x}_0 a na bodě koncovém, \mathbf{x} . Libovůle, kterou máme při volbě bodu \mathbf{x}_0 , odráží nejednoznačnost potenciálu zmíněnou v úvodu této kapitoly.

Poznámka

Pro **vektorové pole \mathbf{F} v rovině** vyplývá z druhé odřážky výše uvedené věty a věty Greenovy¹, že postačující podmínkou jeho potenciálnosti na jednoduše souvislé oblasti je rovnost křížových derivací

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Podobně je postačující podmínkou potenciálnosti **vektorového pole \mathbf{F} v (trojrozměrném) prostoru**, založenou na tzv. Stokesově větě¹, současné splnění rovností

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y},$$

nebo zkráceně

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

kde rot označuje vektorový diferenciální operátor rotace definovaný v kapitole 6.4.

5.5 Plochy

V této kapitole se budeme zabývat dvojrozměrnými plochami v \mathbb{R}^3 a v následujících dvou kapitolách pak integrály na nich. Až na několik málo výjimek by bylo možno vše uvedené zobecnit i na $(n-1)$ -rozměrné nadplochy v \mathbb{R}^n , výklad by se ovšem patřičně komplikoval. Omezíme se proto na z hlediska aplikací pravděpodobně nejvýznamnější případ ploch v trojrozměrném prostoru.

Plochy a plošné integrály jsou dvojrozměrnou obdobou křivek a křivkových integrálů. Jejich studium je ovšem přece jen poněkud komplikovanější. V následujícím výkladu se proto omezíme jen na základní pojmy a věty. Podrobnější poučení může čtenář nalézt v celé řadě učebnic a příruček matematické analýzy (viz např. kniha Rektorysova [5]).

¹ Viz kapitola 5.8.

Definice

Nechť $\sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ je jednou spojitě diferencovatelné zobrazení oblasti $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ do \mathbb{R}^3 . Matici

$$\mathbf{J}^{(\sigma)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial t_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial t_2} \end{pmatrix}$$

nazveme **Jacobiho maticí** zobrazení σ .

Jsou-li sloupce této matice v každém bodě množiny Σ lineárně nezávislými vektory a zobrazení σ je prosté (a inverzní zobrazení je navíc σ^{-1} spojitě), nazveme σ **jednoduchou hladkou plochou**.¹ Obraz množiny Σ v tomto zobrazení nazveme **geometrickým obrazem plochy** σ a budeme jej označovat $\langle \sigma \rangle$.

Poznámka

Podle výše uvedené definice popisujeme jednotlivé body plochy σ pomocí dvou reálných parametrů t_1 a t_2 . Hovoříme proto o **parametrickém zadání plochy**.² Obecnou plochu v \mathbb{R}^3 můžeme zadat ovšem i jinými způsoby. Uveďme si dva nejdůležitější z nich.

Explicitní zadání plochy

Odpovídá-li geometrický obraz plochy grafu nějaké spojitě diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$, je možno tuto plochu popsat právě touto funkcí. Hovoříme pak o explicitním zadání plochy. Podle potřeby můžeme použít i funkcí $y = g(x, z)$ nebo $x = f(y, z)$. Přejít od explicitního zadání plochy k zadání parametrickému není obtížné³:

$$x = t_1, \quad y = t_2, \quad \text{a} \quad z = f(t_1, t_2).$$

Implicitní zadání plochy

Plochu je dále možno popsat prostřednictvím vazebné podmínky, kterou musí splňovat souřadnice bodů na ní ležících⁴. Necht' $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je nenulová spojitě diferencovatelná funkce tří reálných proměnných, která nemá v žádném bodě nulový gradient. Pak je možno tuto vazebnou podmínku zapsat ve tvaru

$$F(x, y, z) = 0.$$

O takovém zadání plochy hovoříme jako o zadání implicitním. Alespoň lokálně od něj můžeme přejít k zadání explicitnímu tak, že rovnici $F(x, y, z) = 0$ vyřešíme vzhledem k některé proměnné, např. z .

Příklad (kulová plocha)

Kulovou plochu se středem v počátku souřadnic a o poloměru r je možno zadat:

- **parametricky:** $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$,

¹ V dalším se budeme zabývat pouze jednoduchými hladkými plochami, i když to nebudeme zpravidla explicitně zdůrazňovat.

² Porovnejte s parametrickým zadáním roviny.

³ Pokuste se pro tento případ napsat Jacobiho matici a ověřit, že její sloupce jsou lineárně nezávislé vektory.

⁴ Porovnejte s normálovou rovnicí roviny.

- **implicitně:** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,
- **explicitně:** $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.¹

Poznámka

Budiž $\mathbf{x}^{(0)} = \sigma(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ nějaký bod zadané plochy σ . Na okolí tohoto bodu je možno zobrazení σ aproximovat pomocí věty o prvním diferenciálu²

$$x_i \approx x_i^{(0)} + \frac{\partial \sigma_i}{\partial t_1}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})(t_1 - t_1^{(0)}) + \frac{\partial \sigma_i}{\partial t_2}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})(t_2 - t_2^{(0)}),$$

kde $i = 1, 2, 3$. Snadno zjistíme, že uvedená rovnice, v níž přibližnou rovnost nahradíme rovností přesnou, odpovídá parametrickému zadání roviny, a to podle geometrické interpretace prvního diferenciálu **roviny tečné** k ploše σ v bodě $\mathbf{x}^{(0)}$. Vektory

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &= \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial t_1}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}); \frac{\partial \sigma_2}{\partial t_1}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}); \frac{\partial \sigma_3}{\partial t_1}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) \right], \\ \boldsymbol{\tau}_2 &= \left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial t_2}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}); \frac{\partial \sigma_2}{\partial t_2}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}); \frac{\partial \sigma_3}{\partial t_2}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) \right] \end{aligned}$$

jsou tedy **tečnými vektory** k ploše σ v bodě $\mathbf{x}^{(0)}$. Jak je vidět z přímého porovnání, odpovídají složky obou vektorů sloupcům Jacobiho matice σ počítaným v bodě $\mathbf{x}^{(0)}$. Podle předpokladu jsou tedy lineárně nezávislé a skutečně zadávají rovinu.

Výše uvedený výpočet můžeme ovšem provést jen tehdy, je-li možno aplikovat větu o prvním diferenciálu – jsou-li například splněny předpoklady definice jednoduché plochy. Existují ovšem obecnější plochy, které nemají v každém bodě tečnou rovinu. Těmi se ale v tomto textu zabývat nebudeme.

Definice

Nenulový vektor vázaný v zadaném bodě $\mathbf{x}^{(0)} = \sigma(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ plochy σ a kolmý k tečné rovině k této ploše (viz předcházející poznámka), nazveme **vektorem normálovým** k ploše σ v bodě $\mathbf{x}^{(0)}$. Má-li tento vektor jednotkovou délku (eukleidovskou normu), nazveme jej **jednotkovým normálovým vektorem**. Obvykle jej budeme označovat písmenem \mathbf{n} .³

Poznámka

Normálových vektorů existuje ve skutečnosti nekonečně mnoho – zaplňují jednorozměrný vektorový prostor. Dokonce ani jednotkový normálový vektor není určen jednoznačně – existují vždy dva, které se navzájem liší znaménkem. Ze všech možných normálových vektorů k zadané ploše v zadaném bodě stačí ale znát jen jeden vybraný. Snadno pak umíme zkonstruovat i všechny ostatní. Tímto vybraným normálovým vektorem může být například vektorový součin dvou libovolně zvolených lineárně nezávislých tečných vektorů.

Poznámka

Velmi jednoduše se hledá normálový vektor pro plochu zadanou implicitně. Necht' $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]$ je libovolný vektor ležící v rovině tečné k ploše $F(x, y, z) = 0$ v bodě $\mathbf{x}^{(0)}$. Pak můžeme pro v absolutní hodnotě malé číslo α přibližně psát⁴

¹ Další možná explicitní vyjádření jsou $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - z^2}$ a $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}$. Volbou znaménka se ovšem vždy omezujeme na jednu polokouli.

² Viz kapitola 2.4.

³ V každém bodě plochy je její normálový vektor současně normálovým vektorem její tečné roviny v tomto bodě.

⁴ Opět využíváme věty o totálním diferenciálu z kapitoly 2.4. Symbolem ∇ označujeme diferenciální operátor gradient (viz též kapitola 6.2).

$$F(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \boldsymbol{\tau}) \approx F(\mathbf{x}^{(0)}) + \alpha \nabla F(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot \boldsymbol{\tau} \approx 0.$$

Bod $\mathbf{x}^{(0)}$ je ale bodem plochy, musí tedy platit $F(\mathbf{x}^{(0)}) = 0$. V limitě $\alpha \rightarrow 0$ přecházejí přibližné rovnosti na přesné a platí tedy

$$\nabla F(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{\tau}$ je libovolný vektor z roviny tečné v zadaném bodě k zadané ploše a gradient F podle předpokladu nenulový, je nutně $\nabla F(\mathbf{x}^{(0)})$ jedním z hledaných normálových vektorů.

Příklad

Pro kulovou plochu můžeme získat nenulový normálový vektor v zadaném bodě $[x, y, z]$ přímo z implicitního vyjádření

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Především platí

$$\nabla F(x, y, z) = [2x, 2y, 2z].$$

Normálový vektor v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ můžeme proto psát ve tvaru

$$\mathbf{n} = [x, y, z]$$

a jednotkové normálové vektory jako

$$\tilde{\mathbf{n}} = \pm \left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right],$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

V parametrickém vyjádření je možno pro jednotkové normálové vektory psát

$$\tilde{\mathbf{n}} = \pm [\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta].$$

Definice

Necht' geometrický obraz plochy σ je hranicí nějaké oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$. Pak plochu σ nazveme **uzavřenou**. Normálový vektor, který míří ven z oblasti V , nazýváme **vnějším normálovým vektorem** nebo také **vektorem vnější normály**.

Příklad

Kulová plocha je uzavřená. Jednotkový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = +[\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta]$ je jednotkovým vektorem vnější normály.

5.6 Plošný integrál prvního druhu

Definice

Budiž $\sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ jednoduchá hladká plocha a $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce definovaná na nějakém okolí každého bodu $\langle \sigma \rangle$. Pak předpisem

$$\iint_{\sigma} f d\sigma \equiv \iint_{\Sigma} f(\sigma(t_1, t_2)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial t_1} \times \frac{\partial \sigma}{\partial t_2} \right\| dt_1 dt_2$$

definujeme **plošný integrál prvního druhu** funkce f na ploše σ .¹ V případě uzavřené plochy se obvykle používá symbol $\oiint_{\sigma} f d\sigma$.

Poznámka

Pro malé změny parametrů dt_1 či dt_2 můžeme popsat změny souřadnic bodů ležících na dané ploše v okolí vybraného bodu $\sigma(t_1^{(0)}, t_2^{(0)})$ pomocí věty o totálním diferenciálu (viz kap. 2.4):

- mění-li se t_1 a t_2 zůstává konstantní, lze psát $d\mathbf{x}^{(1)} = \frac{\partial \sigma}{\partial t_1}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) dt_1$,
- pokud se mění t_2 a naopak t_1 zůstává konstantní, platí $d\mathbf{x}^{(2)} = \frac{\partial \sigma}{\partial t_2}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) dt_2$.

Podle toho se tedy obdélník o stranách dt_1 a dt_2 (patřící do množiny Σ) zobrazí na element plochy σ , který odpovídá v prvním přiblížení kosodélníku o stranách $\|d\mathbf{x}^{(1)}\|$ a $\|d\mathbf{x}^{(2)}\|$. Podle elementárního vzorce je plošný obsah tohoto kosodélníka dán velikostí vektorového součinu $d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}$. Proto (porovnáme-li formálně pravou a levou stranu definičního vztahu pro plošný integrál prvního druhu)

$$d\sigma \equiv \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial t_1} \times \frac{\partial \sigma}{\partial t_2} \right\| dt_1 dt_2 = \|d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}\|$$

odpovídá s přesností do prvního řádu plošnému obsahu infinitezimální části plochy σ vymezené hodnotami parametrů t_1 a t_2 z dvojrozměrného intervalu $(t_1^{(0)}, t_1^{(0)} + dt_1) \times (t_2^{(0)}, t_2^{(0)} + dt_2)$.

Poznámka

Z definice plošného integrálu prvního druhu a z předcházející poznámky vyplývá, že $\iint_{\sigma} 1 d\sigma$ je roven plošnému obsahu plochy σ .²

Věta (nezávislost plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci)

Nechť $\sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ a $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou dvě jednoduché hladké plochy takové, že

- $\langle \sigma \rangle = \langle \omega \rangle$,
- existuje vzájemně jednoznačné spojitě diferencovatelné zobrazení $\mathbf{h}: \Sigma \rightarrow \Omega$ splňující $\sigma(t_1, t_2) = \omega(\mathbf{h}(t_1, t_2))$.

¹ Aby bylo možno počítat naznačené dvojné integrály, musí být množina Σ měřitelná. To budeme vždy v této i v dalších kapitolách předpokládat.

² Ověřte pro kulovou plochu.

Pak pro libovolnou spojitou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou na nějakém okolí geometrického obrazu $\langle \sigma \rangle$ platí

$$\iint_{\sigma} f d\sigma = \iint_{\omega} f d\omega.$$

Hodnota plošného integrálu prvního druhu nezávisí tedy na parametrizaci plochy.

5.7 Plošný integrál druhého druhu

Definice

Nechť \mathbf{n} je pole jednotkových normálových vektorů definované na ploše $\sigma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ a spojitě na celé oblasti Σ . Dále budiž $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě vektorové pole definované na nějakém okolí každého bodu geometrického obrazu $\langle \sigma \rangle$. Pak předpisem¹

$$\iint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\sigma \equiv \iint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

definujeme **plošný integrál druhého druhu** pole \mathbf{J} na ploše σ . V případě uzavřené plochy obvykle volíme \mathbf{n} jako jednotkový vektor vnější normály a používáme se symbol $\oiint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\sigma$.

Poznámka

Z definičního vztahu pro plošný integrál druhého druhu formálně plyne

$$d\sigma = \mathbf{n} d\sigma.$$

Elementu plochy $d\sigma$ přiřazujeme tedy prostřednictvím normálového vektoru \mathbf{n} i směr. To umožňuje u zadané plochy odlišit oblasti „před plochou“ a „za plochou“, což je velmi užitečné v technických a přírodovědných aplikacích – např. při počítání průtoku nejrůznějších veličin vybranou plochou.

Pro obecnou jednoduchou hladkou plochu můžeme vždy zkonstruovat dvě pole jednotkových normálových vektorů zmiňovaných v předcházející definici. Tato pole se v každém bodě geometrického obrazu $\langle \sigma \rangle$ liší pouze znaménkem. Volba jedné konkrétní možnosti pak zadává konkrétní orientaci zadané plochy. V případě uzavřených ploch máme takto na výběr mezi vektory vnější a vnitřní normály, obvykle se ale používají jen vnější normálové vektory.

Poznámka (nezávislost plošného integrálu druhého druhu na parametrizaci)

Z věty o nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci plochy, na které integrál počítáme vyplývá obdobné tvrzení i pro plošné integrály druhého druhu. Jsou-li totiž na plochách σ a ω lišících se pouze parametrizací zadána pole normálových vektorů, která jsou totožná v každém bodě $\langle \sigma \rangle = \langle \omega \rangle$, vyplývá z věty o parametrizační nezávislosti pro integrály prvního druhu

$$\iint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\omega,$$

a tedy podle definice i

$$\iint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\sigma = \iint_{\omega} \mathbf{A} \cdot d\omega.$$

¹ Na pravé straně rovnosti stojí plošný integrál prvního druhu definovaný v předcházející kapitole.

5.8 Integrální věty

Věta (Greenova)

Nechť φ je rovinná uzavřená křivka po částech třídy $C^{(1)}$, která obepíná měřitelnou a jednoduše souvislou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$. Křivka φ nechť je obíhána v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček). Dále budiž $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorové pole spojitě diferencovatelné na nějakém obdélníku obsahujícím geometrický obraz $\langle \varphi \rangle$. Pak platí

$$\oint_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\varphi = \iint_M \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Věta (Gaussova–Ostrogradského)

Budiž V omezená měřitelná oblast na \mathbb{R}^3 a $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě diferencovatelné vektorové pole definované alespoň na $V \cup \partial V$.¹ Dále budiž $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzavřená jednoduchá hladká plocha, jejíž geometrický obraz $\langle \sigma \rangle$ je totožný s hranicí ∂V . Pak platí²

$$\oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx dy dz.$$

Poznámka

Vzhledem k nezávislosti plošného integrálu druhého druhu na parametrizaci plochy, na níž integrujeme, se Gaussova–Ostrogradského věta často píše ve tvaru

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dx dy dz.$$

Věta (Stokesova)

Budiž $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ hladká jednoduchá plocha a $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ křivka splňující $\partial \langle \sigma \rangle = \langle \varphi \rangle$. Dále nechť \mathbf{n} je spojitě pole jednotkových normálových vektorů definované na $\langle \sigma \rangle$ a orientované tak, že v každém bodě $\langle \varphi \rangle$ míří vektor $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$ ³ směrem dovnitř $\langle \sigma \rangle$. \mathbf{A} budiž spojitě diferencovatelné vektorové pole definované alespoň na $\langle \sigma \rangle \cup \langle \partial \sigma \rangle$. Pak platí⁴

$$\oint_{\varphi} \mathbf{A} \cdot d\varphi = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\sigma.$$

Poznámka

Vzájemnou orientaci plochy σ a křivky φ je možno popsat rovněž následujícím názorným způsobem: Půjdeme-li po křivce φ ve směru tečného vektoru $\boldsymbol{\tau}$ a normálový vektor k ploše σ bude mířit od nohou k naší hlavě, pak plochu σ musíme mít stále po levé ruce.

¹ ∂V je hranice oblasti V (viz Apendix A2).

² Symbolem div označujeme vektorový diferenciální operátor divergence (viz kapitola 6.3). Plocha σ je uzavřená, při výpočtu používáme jednotkové vektory vnější normály.

³ $\boldsymbol{\tau}$ je vektor tečný ke křivce φ .

⁴ Symbolem rot označujeme vektorový diferenciální operátor rotace (viz kapitola 6.4).