

## 4 Integrální počet funkcí více reálných proměnných

### 4.1 Dvojné a dvojnásobné integrály

#### Dvojné a dvojnásobné integrály na intervalech z $\mathbb{R}^2$

##### Definice

Pod **uzavřeným intervalem** z  $\mathbb{R}^2$  rozumíme kartézský součin  $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ .

##### Definice

Nechť  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$  je uzavřený interval z  $\mathbb{R}^2$  a  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , resp.  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$  jsou dělení intervalů  $\langle a, b \rangle$ , resp.  $\langle c, d \rangle$ . Pak množinu

$$D \equiv \{ \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \}$$

nazveme **dělením intervalu I** a číslo

$$\nu(D) \equiv \max \{ (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}); i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \}$$

**normou dělení D.**

##### Definice

Nechť  $D \equiv \{ \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \}$  je dělení uzavřeného intervalu  $I$  z  $\mathbb{R}^2$  a  $\xi \equiv \{ [\xi_i, \eta_j]; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \}$  množina uspořádaných dvojic reálných čísel takových, že  $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  a  $\eta_j \in \langle y_{j-1}, y_j \rangle$ . Dále necht' je  $f$  omezená funkce na intervalu  $I$ <sup>1</sup>. Pak součet

$$S(f, D, \xi) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

nazveme **Riemannovou integrální sumou** funkce  $f$  pro dělení  $D$  a množinu čísel  $\xi$ .

##### Definice

Nechť  $D_N$  je posloupnost dělení intervalu  $I$ , jejichž norma konverguje k nule,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \nu(D_N) = 0$ , a  $\xi_N$  posloupnost množin dvojic čísel  $\{ [\xi_i^{(N)}, \eta_j^{(N)}]; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \}$  z předcházející definice přiřazených dělením  $D_N$ . Funkce  $f(x)$  necht' je definována a omezená na intervalu  $I$ . Existuje-li pro všechny takové posloupnosti jejich společná limita<sup>2</sup>

$$I = \lim_{N \rightarrow +\infty} S(f, D_N, \xi_N),$$

<sup>1</sup> Tj. existuje takové nezáporné číslo  $K$ , že pro každou dvojici  $[x, y]$  z intervalu  $I$  platí  $|f(x, y)| \leq K$ .

<sup>2</sup> Viz Apendix A3.

nazveme tuto limitu **dvojným Riemannovým integrálem** funkce  $f(x)$  na intervalu  $I$ . Samotnou funkci pak nazveme **integrovatelnou na intervalu  $I$** .

Pro dvojné integrály na intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$  používáme obvykle označení  $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ <sup>1</sup> nebo  $\iint_I f(x, y) dx dy$ .

### Věta (Fubiniova)

Nechť je funkce  $f(x, y)$  integrovatelná na intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . Pak platí

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

### Poznámka

Podle Fubiniovy věty můžeme tedy dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu počítat jako dvojici integrálů jednoduchých, přičemž na pořadí integrace nezáleží. Musíme ovšem zaručit, že hledaný dvojný integrál existuje, což je možné například pro spojitě integrandy.

Integrály na pravé straně rovnosti nazýváme zpravidla **dvojnásobnými**.

## Dvojné a dvojnásobné integrály na obecnějších množinách

### Definice

Nechť  $M$  je podmnožina nějakého dvojrozměrného intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . Na tomto intervalu definujeme funkci

$$\begin{aligned} h(x, y) &= 1 && \text{pro } [x, y] \in M, \\ h(x, y) &= 0 && \text{pro } [x, y] \notin M. \end{aligned}$$

Pokud existuje  $\iint_I h(x, y) dx dy$ , nazveme množinu  $M$  (**Riemannovsky**) **měřitelnou** a odpovídající dvojný integrál **mírou (plošným obsahem)** této množiny.

### Poznámka

Všimněte si, že míra intervalu  $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$  je podle očekávání  $(b-a)(d-c)$ .

### Věta

Množiny

$$\begin{aligned} N_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}, \\ N_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \chi(y) \leq x \leq \omega(y), c \leq y \leq d\}, \end{aligned}$$

kde  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  a  $\omega$  jsou spojitě funkce na intervalech  $\langle a, b \rangle$  a  $\langle c, d \rangle$ , jsou měřitelné.

<sup>1</sup> V námi používané konvenci odpovídá vnitřní integrál vnitřnímu diferenciálu a vnější integrál diferenciálu vnějšmu.

**Definice**<sup>1</sup>

Nechť  $M \subset I \subset \mathbb{R}^2$  ( $I$  je uzavřený interval z  $\mathbb{R}^2$ ) je měřitelná množina a funkce  $f(x, y)$  je na ní definována. Na intervalu  $I$  definujeme novou funkci

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) &= f(x, y) && \text{pro } [x, y] \in M, \\ \tilde{f}(x, y) &= 0 && \text{pro } [x, y] \notin M.\end{aligned}$$

Pokud existuje  $\iint \tilde{f}(x, y) dx dy$ , řekneme, že funkce  $f$  je na množině  $M$  **Riemannovsky integrovatelná**, a odpovídající integrál nazveme **dvojným Riemannovým integrálem** funkce  $f$  na množině  $M$ .

Pro dvojné integrály na obecných měřitelných množinách budeme ve shodě s výše uvedeným značením používat symbol  $\iint_M f(x, y) dx dy$ .

**Věta (Fubiniova)**<sup>2</sup>

Nechť  $N_1$  a  $N_2$  jsou výše zavedené měřitelné množiny a  $f(x, y)$  nechť je integrovatelná funkce na těchto množinách. Pak platí

$$\begin{aligned}\iint_{N_1} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx, \\ \iint_{N_2} f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left( \int_{\chi(y)}^{\omega(y)} f(x, y) dx \right) dy.\end{aligned}$$

**Poznámka**

I v případě obecnějších množin  $N_1$  a  $N_2$  je tedy možno dvojné integrály počítat pomocí integrálů jednoduchých, pokud ovšem víme, že příslušný dvojný integrál existuje. To je opět zaručeno například pro spojitě funkce.

## 4.2 Substituce ve dvojných integrálech

Podobně jako u jednorozměrných integrálů rozumíme i nyní pod substitucí náhradu jedné integrační proměnné, např.  $x$  a  $y$ , proměnnými jinými, např.  $u$  a  $v$ :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Předpokládáme přitom, že

- funkce  $\varphi$  a  $\psi$  zobrazují vzájemně jednoznačně nějakou měřitelnou množinu  $A \subset \mathbb{R}^2$  na jinou měřitelnou množinu  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,
- funkce  $\varphi$  a  $\psi$  mají na množině  $A$  spojitě první derivace,
- tzv. **Jacobiho determinant** substituce

<sup>1</sup> I tato definice je v zájmu zachování jednoduchosti výkladu velmi zjednodušená. Podrobnější informaci může zájemce opět najít ve specializované literatuře.

<sup>2</sup> Všechny věty, které nesou v této i další kapitole označení Fubiniova jsou speciálními variantami jediné obecné věty o rozkladu vícerozměrných integrálů na integrály násobné. V matematické literatuře je tato věta obvykle nazývána větou Fubiniovou, a proto jsme takové označení zachovali bez jakéhokoliv dalšího rozlišení i pro speciální formulace, jak je uvádíme v tomto skriptu.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \det \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial u & \partial\varphi/\partial v \\ \partial\psi/\partial u & \partial\psi/\partial v \end{pmatrix}$$

je na množině  $A$  nenulový<sup>1</sup>.

### Věta (o substituci)

Jsou-li splněny podmínky předcházející poznámky a funkce  $f(x, y)$  je integrovatelná na množině  $B$ , platí<sup>2</sup>

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

### Poznámka

Pomocí věty o substituci se často podaří počítaný integrál významně zjednodušit. Převedením do nových proměnných je možno významně zjednodušit jak integrovanou funkci, tak i množinu, na které integraci provádíme. Nezřídka je možno dosáhnout toho, aby nová množina  $A$  byla dvojrozměrným intervalem. Blíže si to ukážeme na příkladech integrace v polárních souřadnicích.

## Integrace v polárních souřadnicích

### Definice

Souřadnice  $r \geq 0$  a  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , které souvisejí s kartézskými souřadnicemi  $x$  a  $y$  prostřednictvím vztahů

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \end{aligned}$$

nazýváme *souřadnicemi polárními*.

### Věta

Nechť je funkce  $f(x, y)$  integrovatelná na kruhu  $K = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$ <sup>3</sup>. Pak platí

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tilde{f}(r, \phi) r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{r_0} \tilde{f}(r, \phi) r dr \right) d\phi,$$

kde  $\tilde{f}(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$ .

### Poznámka

Věta o polární substituci ve dvojném integrálu na kruhu je speciálním důsledkem výše uvedené obecné věty o substituci ve dvojných integrálech. Pokuste se sami formulovat podobnou větu pro integraci na mezikruží<sup>4</sup> či na kruhové výseči<sup>5</sup>.

<sup>1</sup> Předpoklad nenulovosti Jacobiho determinantu je možno poněkud zeslabit, čehož využijeme například při přechodu od kartézských k polárním souřadnicím.

<sup>2</sup> Svislé čáry  $||$  označují v integrálu na pravé straně absolutní hodnotu.

<sup>3</sup> Dokažte, že kruh  $K$  je množinou typu  $N_1$  i  $N_2$ .

<sup>4</sup>  $K_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2\}$

<sup>5</sup>  $K_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x^2 + y^2 \leq r_0^2, \phi \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$

**Příklad**Vypočítejte integrál<sup>1</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

Přímé použití Fubiniovy věty pro integraci na dvojrozměrném intervalu dává

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right] dy = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 .$$

Přechod do polárních souřadnic a následné použití Fubiniovy věty vede k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right] d\varphi = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr$$

a po provedení zbývajících integrací

$$\int e^{-r^2} r dr = \left[ \begin{matrix} z = -r^2 \\ dz = -2r dr \end{matrix} \right] = -\frac{1}{2} \int e^z dz = -\frac{1}{2} e^z$$

dále k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi .$$

Porovnáním obou výsledků získáváme velmi užitečný vzorec (s širokým použitím např. ve fyzice)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .}$$

Tento výsledek nelze získat přímo z definice nevlastního integrálu, protože neurčitý integrál  $\int e^{-x^2} dx$  není možno vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

---

<sup>1</sup> Níže pracujeme se zadaným integrálem, jako by se jednalo o integrál přes omezený interval z  $\mathbb{R}^2$ . Čtenář nám jistě tuto velkorysost v zájmu zachování jednoduchosti výkladu promine a uvěří, že uvedený postup je korektní.

## 4.3 Trojné a trojnásobné integrály

### Trojné a trojnásobné integrály na intervalech z $\mathbb{R}^3$

#### Definice

Pod **uzavřeným intervalem** z  $\mathbb{R}^3$  rozumíme kartézský součin  $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$ .

#### Definice

Nechť  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$  je uzavřený interval z  $\mathbb{R}^3$  a  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$  a  $e = z_0 < z_1 < \dots < z_p = g$  jsou dělení intervalů  $\langle a, b \rangle$ ,  $\langle c, d \rangle$  a  $\langle e, g \rangle$ . Pak množinu

$$D \equiv \left\{ \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle; i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, k=1, \dots, p \right\}$$

nazveme **dělením intervalu I** a číslo

$$\nu(D) \equiv \max \left\{ (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}); i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, k=1, \dots, p \right\}$$

**normou dělení D.**

#### Definice

Nechť  $D \equiv \left\{ \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle \times \langle z_{k-1}, z_k \rangle; i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, k=1, \dots, p \right\}$  je dělení uzavřeného intervalu  $I$  z  $\mathbb{R}^3$  a  $\xi \equiv \left\{ [\xi_i, \eta_j, \omega_k]; i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, k=1, \dots, p \right\}$  množina uspořádaných trojic reálných čísel takových, že  $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ,  $\eta_j \in \langle y_{j-1}, y_j \rangle$  a  $\omega_k \in \langle z_{k-1}, z_k \rangle$ . Dále nechť je  $f$  omezená funkce na intervalu  $I$ <sup>1</sup>. Pak součet

$$S(f, D, \xi) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(\xi_i, \eta_j, \omega_k) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

nazveme **Riemannovou integrální sumou** funkce  $f$  pro dělení  $D$  a množinu čísel  $\xi$ .

#### Definice

Nechť  $D_N$  je posloupnost dělení intervalu  $I$ , jejichž norma konverguje k nule,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \nu(D_N) = 0$ , a  $\xi_N$  posloupnost množin trojic čísel  $\left\{ [\xi_i^{(N)}, \eta_j^{(N)}, \omega_k^{(N)}] \right\}$  z předcházející definice přiřazených dělením  $D_N$ . Funkce  $f(x)$  nechť je definována a omezená na intervalu  $I$ . Existuje-li pro všechny takové posloupnosti jejich společná limita<sup>2</sup>

$$I = \lim_{N \rightarrow +\infty} S(f, D_N, \xi_N),$$

<sup>1</sup> Tj. existuje takové nezáporné číslo  $K$ , že pro každou trojici  $[x, y, z]$  z intervalu  $I$  platí  $|f(x, y, z)| \leq K$ .

<sup>2</sup> Viz Appendix A3.

nazveme tuto limitu **trojným Riemannovým integrálem** funkce  $f(x)$  na intervalu  $I$ . Samotnou funkci pak nazveme **integrovatelnou na intervalu  $I$** .

Pro trojné integrály na intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$  používáme obvykle označení

$$\int_e^g \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz^1 \text{ nebo } \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

### Věta (Fubiniova)

Nechť je funkce  $f(x, y, z)$  integrovatelná na intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$ . Pak platí

$$\int_e^g \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_e^g f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

### Poznámka

Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál na trojrozměrném intervalu počítat jako trojici integrálů jednoduchých, přičemž podobně jako u integrálů dvojných nezáleží na pořadí integrace. Musíme ovšem zaručit, že hledaný trojný integrál existuje, což je možné například pro spojitě integrandy.

Integrály na pravé straně rovnosti nazýváme zpravidla **trojnásobnými**.

## Trojné a trojnásobné integrály na obecnějších množinách

### Definice

Nechť  $M$  je podmnožinou nějakého trojrozměrného intervalu  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$ .

Na tomto intervalu definujeme funkci

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= 1 \quad \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ h(x, y, z) &= 0 \quad \text{pro } [x, y, z] \notin M. \end{aligned}$$

Pokud existuje  $\iiint_M h(x, y, z) dx dy dz$ , nazveme množinu  $M$  (**Riemannovsky**) **měřitelnou** a odpovídající trojný integrál **mírou (objemem)** této množiny.

### Poznámka

Všimněte si, že míra intervalu  $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle$  je podle očekávání  $(g - e)(c - d)(b - a)$ .

### Definice

Nechť  $M \subset I \subset \mathbb{R}^3$  ( $I$  je uzavřený interval z  $\mathbb{R}^3$ ) je měřitelná množina a funkce  $f(x, y, z)$  je na ni definována. Na intervalu  $I$  definujeme novou funkci

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y, z) &= f(x, y, z) && \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ \tilde{f}(x, y, z) &= 0 && \text{pro } [x, y, z] \notin M. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> V námi používané konvenci odpovídá vnitřní integrál vnitřnímu diferenciálu a podobně vnější integrál diferenciálu vnějšímu. Je to obdobné jako u integrálů dvojných.

Pokud existuje  $\iiint_M \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$ , řekneme, že funkce  $f$  je na množině  $M$  **Riemannovsky integrovatelná**, a odpovídající integrál nazveme **trojným Riemannovým integrálem** funkce  $f$  na množině  $M$ .

Pro trojné integrály na obecných měřitelných množinách budeme ve shodě s výše uvedeným značením používat symbol  $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ .

## 4.4 Substituce v trojných integrálech

Podobně jako v případě dvojných integrálů předpokládáme, že přechod od integračních proměnných  $x, y$  a  $z$  k novým proměnným  $u, v$  a  $w$

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

splňuje následující podmínky:

- funkce  $\varphi, \psi$  a  $\chi$  zobrazují vzájemně jednoznačně nějakou měřitelnou množinu  $A \subset \mathbb{R}^3$  na jinou měřitelnou množinu  $B \subset \mathbb{R}^3$ ,
- funkce  $\varphi, \psi$  a  $\chi$  mají na množině  $A$  spojité první derivace,
- **Jacobiho determinant** substituce

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \equiv \det \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial u & \partial\varphi/\partial v & \partial\varphi/\partial w \\ \partial\psi/\partial u & \partial\psi/\partial v & \partial\psi/\partial w \\ \partial\chi/\partial u & \partial\chi/\partial v & \partial\chi/\partial w \end{pmatrix}$$

je na množině  $A$  nenulový<sup>1</sup>.

### Věta (o substituci)

Jsou-li splněny podmínky předcházející poznámky a funkce  $f(x, y, z)$  je integrovatelná na  $B$ , platí<sup>2</sup>

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

### Poznámka

Pomocí věty o substituci se často podaří převést integraci na obecné měřitelné množině na jednodušší integraci na trojrozměrném intervalu. Níže si ukážeme konkrétní použití této věty při přechodu od kartézských k válcovým a kulovým souřadnicím.

## Integrace ve válcových (cylindrických) souřadnicích

### Definice

Souřadnice  $r \geq 0$ ,  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a  $z \in (-\infty, +\infty)$ , které souvisejí s kartézskými souřadnicemi prostřednictvím vztahů<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

nazýváme **souřadnicemi válcovými**.

<sup>1</sup> I v případě trojných integrálů je možno předpoklad nenulovosti Jacobiho determinantu poněkud zeslabit.

<sup>2</sup> Svislé čáry  $||$  označují v integrálu na pravé straně absolutní hodnotu.

<sup>3</sup> Kartézská souřadnice  $z$  je totožná s cylindrickou. Užíváme proto pro ně stejné označení.



**Věta**

Nechť je funkce  $f(x, y, z)$  integrovatelná na válci  $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq r_0^2, 0 \leq z \leq h\}$ .

Pak platí

$$\iiint_C f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tilde{f}(r, \phi, z) r dr d\phi dz = \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{r_0} \tilde{f}(r, \phi, z) r dr \right) d\phi \right) dz,$$

kde  $\tilde{f}(r, \phi, z) = f(r \cos \phi, r \sin \phi, z)$ .

**Integrace v kulových (sférických) souřadnicích****Definice**

Souřadnice  $r \geq 0$ ,  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a  $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ , které souvisejí s kartézskými souřadnicemi prostřednictvím vztahů

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta, \\ y &= r \sin \phi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

nazýváme *souřadnicemi kulovými*.

**Věta**

Nechť je funkce  $f(x, y, z)$  integrovatelná na kouli  $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2\}$ . Pak platí

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \tilde{f}(r, \phi, \theta) \sin \theta r^2 dr d\phi d\theta = \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{r_0} \tilde{f}(r, \phi, \theta) r^2 dr \right) d\phi \right) \sin \theta d\theta,$$

kde  $\tilde{f}(r, \phi, \theta) = f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$ .