

7 Obyčejné diferenciální rovnice

7.1 Základní pojmy

Diferenciální rovnice

Definice

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu rozumíme rovnici

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nebo, je-li takzvaně *rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci*, rovnici tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Poznámka

- Slovně řečeno, jedná se o vztah mezi funkcí $y(x)$ jedné proměnné a jejími derivacemi. Řád diferenciální rovnice je dán nejvyšší derivací, která se v rovnici vyskytuje.
- Speciálním případem je diferenciální rovnice prvního řádu $F(x, y, y') = 0$ nebo, je-li rozřešena vzhledem k první derivaci, $y' = f(x, y)$.

Příklad

Rovnice $y'' - xy'^2 + \cos x = 0$ je obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci y nezávislé proměnné x .

Partikulární řešení

Definice

Řešením neboli **integrálem** (také **partikulárním integrálem** nebo **integrální křivkou**) rovnice $F(x, y, y') = 0$ nazýváme každou funkci $y = g(x)$, která v uvažovaném oboru této rovnici identicky vyhovuje.

Poznámka

- Uvažovaným oborem je nejčastěji otevřený interval I , speciálně např. okolí nějakého bodu nebo celá množina \mathbb{R} reálných čísel.
- Formulace „vyhovuje identicky“ znamená, že po dosazení řešení $g(x)$ za y do diferenciální rovnice dostaneme vztah, který je splněn ve všech bodech x uvažovaného oboru.
- Řešení může být dáno také jako implicitní funkce, tzn. rovnicí $h(x, y) = 0$, kdy y chápeme jako veličinu závislou na nezávislé proměnné x .
- Řešení diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x, y)$ má geometrický význam. Uvedenou rovnicí je dáno tzv. **směrové pole**, které každému bodu $[x, y]$ z uvažovaného oboru přiřazuje **směrový element** (krátkou úsečku) se směrnicí $\operatorname{tg} \alpha = y'$. Vyřešit diferenciální rovnici znamená najít takové křivky, které se v každém svém bodě dotýkají směrového elementu.

Poznámka

Obecně vzato nemusí mít určitá diferenciální rovnice v uvažovaném oboru žádné řešení, několik řešení nebo i nekonečně mnoho řešení. V praxi je důležité vědět, zda řešení vůbec existuje a je-li (případně za jakých podmínek) jednoznačné. O tom hovoří následující věta.

Počáteční podmínky**Věta**

Nechť je dána diferenciální rovnice n -tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci, tj. ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

a bod $P[a, b_1, b_2, \dots, b_n]$. Nechť funkce $f, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dy'}, \dots, \frac{df}{dy^{(n-1)}}$ jsou spojité (jako funkce $n+1$ proměnných) v okolí bodu P . Pak v určitém okolí bodu a existuje právě jedno řešení $y = g(x)$, které splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(a) = b_1, y'(a) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_n.$$

Poznámka

- Počáteční podmínky předepisují hodnotu hledaného řešení a jeho $(n-1)$ derivací ve vybraném bodě a . Volbou počátečních podmínek si vlastně vybíráme z mnoha přípustných řešení pouze jediné.
- Věta má lokální charakter (pojednává o řešení v okolí bodu a). Silnější větu, která by zaručovala existenci a jednoznačnost řešení v celém uvažovaném intervalu I , je možné formulovat např. pro tzv. lineární diferenciální rovnice (budou uvedeny dále). Obecně nalezneme-li řešení určité diferenciální rovnice s danými počátečními podmínkami v nějakém okolí bodu a , musíme vyšetřit, zda je možné toto řešení rozšířit i mimo toto okolí (např. na celý interval) a zda je toto rozšíření jednoznačné.
- Obecnější tvar diferenciální rovnice, tj. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, použít nelze, protože ani za uvedených poměrně přísných podmínek pro funkci F není zaručena jednoznačnost řešení.

Poznámka

Nalezené řešení (v okolí zvoleného bodu a) je dáno volbou počátečních podmínek, tzn. n -tíci hodnot $[b_1, b_2, \dots, b_n]$. Je tedy funkcí n volných parametrů. Nabízí se otázka, zda je možné formulovat takové řešení dané diferenciální rovnice, ve kterém by vystupovalo n nezávislých parametrů (konstant nezávislých na proměnné x), jejichž vhodnou volbou by toto řešení přešlo v řešení vyhovující konkrétní počáteční podmínce.

Obecné řešení**Definice**

Nechť Ω je $(n+1)$ -rozměrná oblast složená z takových bodů $P[a, b_1, b_2, \dots, b_n]$, pro které má rovnice $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ právě jedno řešení. **Obecným řešením (obecným integrálem) diferenciální rovnice** $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ **vzhledem k oblasti** Ω rozumíme takovou funkci $g(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ proměnné x a konstant C_1, C_2, \dots, C_n takovou, že pro každý bod $P \in \Omega$ lze těmto konstantám přiřadit (a to jednoznačně) takové číselné hodnoty, že vzniklá funkce proměnné x , tj. $y(x) = g(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, je řešením dané diferenciální rovnice s počátečními podmínkami $y(a) = b_1, y'(a) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_n$.

Poznámka

- Řečeno jinak, obecné řešení (vzhledem k oblasti Ω) v sobě obsahuje všechna partikulární řešení (odpovídající počátečním podmínkám $P \in \Omega$) a tato partikulární řešení z něj dostaneme vhodnou volbou konstant.
- Žádná z konstant C_1, C_2, \dots, C_n v obecném řešení není zbytečná, tzn. nelze ji vypustit ani spojit s jinou konstantou. Pokud by bylo možné snížit počet konstant např. ekvivalentní úpravou a zavedením konstant nových, nemohlo by jít o obecné řešení.
- Obecné řešení bylo výše exaktně definováno pouze pro diferenciální rovnici rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci. Běžně se termín „obecné řešení“ (v určité oblasti Ω) používá volněji pro takovou funkci $g(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, kde vhodnou (ale ne nutně jednoznačnou) volbou konstant C_1, C_2, \dots, C_n lze splnit libovolné počáteční podmínky z oblasti Ω . Počáteční podmínka, daná např. bodem $P[a, b_1, b_2, \dots, b_n] \in \Omega$, tedy může být splněna dvěma či více různými volbami konstant C_1, C_2, \dots, C_n , kterým odpovídají různá partikulární řešení. V tomto smyslu lze hovořit i o obecném řešení diferenciální rovnice nerozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci.

Příklad

Obecným integrálem diferenciální rovnice $y'' - y' - 2y = 0$ vzhledem k oblasti $\Omega = \mathbb{R}^3$ je funkce $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Pro libovolné počáteční podmínky $y(a) = b_1$, $y'(a) = b_2$, kde $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ (neboli bod $P[a, b_1, b_2] \in \Omega$), stačí vzít $C_1 = \frac{1}{3}(b_1 + b_2)e^{-2a}$, $C_2 = \frac{1}{3}(2b_1 - b_2)e^a$. Dosazením těchto hodnot do obecného integrálu obdržíme partikulární integrál

$$y = \frac{1}{3} \left[(b_1 + b_2) e^{2(x-a)} + (2b_1 - b_2) e^{a-x} \right],$$

který splňuje původní diferenciální rovnici v celém reálném oboru a vyhovuje zvolené počáteční podmínce.

Singulární řešení

Poznámka

V praxi se poměrně často objevuje případ, kdy kromě obecného řešení nějaké diferenciální rovnice (vzhledem k nějaké oblasti Ω) existuje i řešení, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant, ale které splňuje danou diferenciální rovnici pro určité počáteční podmínky.

Definice

Singulárním řešením (singulárním integrálem) diferenciální rovnice rozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci nazýváme takové řešení (integrální křivku) této rovnice, v jehož každém bodě je porušena jednoznačnost, tzn. každým bodem $[x, y]$ tohoto řešení prochází ještě jiné řešení (integrální křivka).

Poznámka

- Singulárním řešením je např. obálka (pokud existuje) parametrického systému křivek tvořeného obecným řešením.
- Věta o jednoznačnosti řešení není narušena, pouze v bodech, kterými singulární řešení prochází, nejsou splněny předpoklady její platnosti.
- V praxi identifikujeme singulární řešení nejčastěji tak, že je (v protikladu k běžnému partikulárnímu řešení) nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant.
- Zobecnění na všechny diferenciální rovnice je možné požadavkem, aby každým bodem singulárního řešení procházelo jiné řešení (integrální křivka) se stejnou tečnou.

7.2 Vybrané diferenciální rovnice prvního řádu

Poznámka

Podobně jako neexistuje obecný algoritmus pro výpočet integrálů, neexistuje ani obecný návod pro řešení diferenciálních rovnic, a to dokonce ani v případě, kdy se omezíme pouze na diferenciální rovnice prvního řádu. Jsou totiž také diferenciální rovnice, které nelze řešit analyticky (řeší se např. numericky, pomocí funkčních řad apod.). Řešení rozličných typů diferenciálních rovnic se dá nalézt v nejrůznějších příručkách a monografiích, a to buď ve formě určité (zpravidla integrální) formule, nebo výpočetního algoritmu. V této kapitole je podáno řešení vybraných základních typů diferenciálních rovnic prvního řádu rozřešených vzhledem k první derivaci.

Rovnice typu $y' = f(x)$

Za předpokladu, že funkce $f(x)$ je ve vyšetřovaném oboru spojitá, má uvedená rovnice obecný integrál $y = \int f(x) dx$. Integrační konstanta je zahrnuta v neurčitěm integrálu. Partikulární integrál vyhovující počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ je $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$. Na pravé straně poslední rovnice se jedná o integrál jako funkci horní meze.

Rovnice typu $y' = f(y)$

Za předpokladu, že funkce $f(x)$ je ve vyšetřovaném oboru spojitá a různá od nuly, řešíme rovnici přepsáním na tvar $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$, čímž uvedenou rovnici převedeme na rovnici předchozího typu pro funkci $x(y)$. Obecným integrálem je tudíž $x = \int \frac{dy}{f(y)}$ a partikulárním integrálem $x = y_0 + \int_{y_0}^y \frac{dt}{f(t)}$.

Rovnice typu $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ (separovatelná)

Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce $g(y)$ spojitá a různá od nuly v intervalu $\langle c, d \rangle$, pak uvedená rovnice má v oblasti $\Omega = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ obecný integrál $\int f(x) dx = \int g(y) dy$. Partikulární integrál procházející bodem $[x_0, y_0] \in \Omega$ je dán rovnicí $\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{y_0}^y g(s) ds$.

Poznámka

- Tento typ diferenciální rovnice v sobě zahrnuje oba dva předchozí typy jako speciální případy.
- Název této rovnice souvisí s tím, že ji řešíme tzv. *separací proměnných*, tj. jejich oddělením na jednotlivé strany rovnice.

Rovnice typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní)

Předpokládá se $x \neq 0$ ve vyšetřovaném oboru. Řešíme zavedením nové funkce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ neboli $x \cdot z(x) = y(x)$. Derivováním poslední rovnice podle x dostaneme vztah $y' = z + x \cdot z'$. Dosadíme-li uvedené výrazy za y a y' do původní rovnice, dostaneme diferenciální rovnici $z + x \cdot z' = f(z)$, kterou jednoduše upravíme na rovnici se separovanými proměnnými $z' = \frac{f(z) - z}{x}$. Najdeme-li její řešení $z(x)$, je řešením původní rovnice funkce $y(x) = x \cdot z(x)$.

Poznámka

- Termín *homogenní* v názvu rovnice znamená, že na pravé straně se jedná o tzv. homogenní funkci (nultého stupně). Připomeňme, že funkce $f(x, y)$ se nazývá homogenní s -tého stupně, platí-li $f(tx, ty) = t^s f(x, y)$.
- Na homogenní rovnici lze převést rovnici $y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$ tak, že se vhodnou substitucí $x = u + A$, $y = v + B$ zbavíme absolutních členů c_1, c_2 .

Rovnice typu $y' + a(x)y = b(x)$ (lineární)

Jsou-li funkce $a(x)$, $b(x)$ spojité v určitém intervalu, existuje v tomto intervalu právě jedno řešení splňující danou počáteční podmínku. Postup nalezení tohoto řešení je následující. Nejprve řešíme rovnici bez pravé strany, tzv. *homogenní* rovnici (nezaměňovat s názvem předchozí diferenciální rovnice!) $y' + a(x)y = 0$. Tato rovnice se řeší separací proměnných:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx \Rightarrow \ln(Ky) = - \int a(x) dx \Rightarrow Ky = e^{-\int a(x) dx} \Rightarrow y = Ce^{-\int a(x) dx}, \quad C = \frac{1}{K}.$$

Obecný integrál původní rovnice (nehomogenní, s pravou stranou) dostaneme tzv. **metodou variace konstanty**. Předpokládáme, že řešení nehomogenní rovnice má stejný tvar jako řešení homogenní rovnice, avšak integrační konstantu považujeme za funkci proměnné x : $y = C(x)e^{-\int a(x) dx}$. Tento výraz derivujeme podle x a dosadíme do původní rovnice:

$$C'(x)e^{-\int a(x) dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x) dx} + a(x)C(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x) \Rightarrow C'(x)e^{-\int a(x) dx} = b(x).$$

Dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro funkci $C(x)$, jejímž řešením je $C(x) = \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx$. Dosazením do předpokládaného řešení nehomogenní rovnice obdržíme nakonec obecný integrál ve tvaru $y = e^{-\int a(x) dx} \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx$.

Exaktní rovnice

Definice

Je dána rovnice $y' + \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = 0$, kde funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ mají v určité oblasti Ω spojitě derivace prvního řádu. Rovnici lze snadno převést na diferenciální formu $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$. Pokud je levá strana poslední rovnice v Ω totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$, jedná se o tzv. **exaktní rovnici**.

Věta

Obecný integrál exaktní rovnice je dán rovnicí $F(x, y) = C$ (význam symbolů viz v předchozí definici).

Poznámka

- Aby výraz $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ byl totálním diferenciálem, musí v Ω platit rovnost $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.
- Vlastní řešení probíhá tak, že nejprve ověříme, zda platí rovnost $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, a pokud ano, nalezneme funkci $F(x, y)$. Tato funkce je s funkcemi $f(x, y)$ a $g(x, y)$ svázána vztahy $f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ a $g(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, odkud $F(x, y) = \int f(x, y)dx + C(y)$ a $F(x, y) = \int g(x, y)dy + C(x)$.
- Pokud rovnice není exaktní, můžeme se pokusit najít takovou funkci $m(x, y)$, zvanou **integrační faktor**, aby rovnice $m(x, y)f(x, y)dx + m(x, y)g(x, y)dy = 0$ byla exaktní. Najít integrační faktor není obecně snadné, protože musíme řešit parciální diferenciální rovnici $\frac{\partial(mf)}{\partial y} = \frac{\partial(mg)}{\partial x}$. Dá se však snadno ukázat, že pokud je výraz $\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}$, resp. $\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{f}$, funkcí pouze proměnné x , resp. y , je také integrační faktor funkcí pouze x , resp. y , a nalezneme jej řešením rovnice $\frac{d \ln m}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}$, resp. $\frac{d \ln m}{dy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{-f}$.

Rovnice typu $y = f(x, y')$

Rovnici přepíšeme na tvar $y = f(x, p)$, kde jsme zavedli parametr $p \equiv y'$. Derivací podle x a opětovým dosazením parametru p za y' obdržíme rovnici

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$$

a po úpravě

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, p)}{\partial p}}.$$

Toto je rovnice prvního řádu pro neznámou funkci $p(x)$ rozřešená vzhledem k derivaci. Najdeme-li její obecný integrál $p = g(x, C)$, dosazením do původní rovnice obdržíme její obecné řešení $y = f(x, g(x, C))$.

Poznámka

- Jedná se o rovnici nerozřešenou vzhledem k první derivaci.
- Lze také nejprve derivovat výchozí rovnici podle x , čímž dostaneme rovnici druhého řádu $y' = \frac{\partial f(x, y')}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y')}{\partial y'} y''$, ve které nevystupuje y , a teprve do této rovnice dosadit p za y' , čímž dosáhneme snížení jejího řádu.
- Zajímavý moment nastává v okamžiku, kdy již máme řešení $p = g(x, C)$. Místo dosazení do původní rovnice se nabízí také možnost vrátit se k y' a řešit úlohu $y' = g(x, C)$. Tím bychom však dostali řešení rovnice druhého řádu uvedené v předchozím bodě této poznámky (se dvěma integračními konstantami), což není naším úkolem.
- Speciálním případem je rovnice $y = xy' + \varphi(y')$ zvaná **Clairautova** (čteme „klerotova“). Výše uvedeným postupem snadno zjistíme, že její obecné řešení má tvar $y = Cx + \varphi(C)$, a navíc objevíme, že existuje i další, singulární řešení, které vyhovuje rovnici $x + \frac{d\varphi}{dy'} = 0$.

Rovnice typu $x = f(y, y')$

Tuto rovnici řešíme obdobně jako předchozí typ. Zavedením parametru $p \equiv y'$ a derivací rovnice podle y (pozor, ne podle x) obdržíme rovnici prvního řádu

$$\frac{1}{p} \left(= \frac{dx}{dy} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}$$

pro neznámou funkci $p(y)$, kterou opět můžeme jednoduše převést na rovnici

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f(y, p)}{\partial y}}{\frac{\partial f(y, p)}{\partial p}}$$

rozřešenou vzhledem k první derivaci. Obecný integrál této rovnice $p = g(y, C)$ dosadíme do výchozí rovnice a obdržíme její obecný integrál v implicitním tvaru $x = f(y, g(y, C))$.

Poznámka

- Jedná se o rovnici nerozřešenou vzhledem k první derivaci.
- Stejným způsobem je možné řešit rovnice $y = f(y')$, resp. $x = f(y')$, které jsou speciálními případy obou předchozích typů.

7.3 Vybrané diferenciální rovnice vyšších řádů

Rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$

Řešíme n -násobnou opakovanou integrací podle x .

Příklad

První integrací rovnice druhého řádu $y'' = f(x)$ obdržíme rovnici $y' = \int f(x) dx$, její integrací pak obecně řešíme

$$y = \int y'(x) dx = \int \left(\int f(x) dx \right) dx.$$

Rovnice typu $F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, kde $m \geq 1$

Rovnici substitucí $y^{(m)} = z$ převedeme na rovnici $(n-m)$ -tého řádu $F(x, z, z', \dots, z^{(n-m)}) = 0$ pro funkci $z(x)$. Nalezneme-li řešení této rovnice, pak jeho opakovanou integrací (viz předchozí typ) obdržíme $y(x)$.

Poznámka

- Uvedený postup se nazývá **snížení řádu diferenciální rovnice**.
- Speciální tvar $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$, resp. $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, můžeme uvedeným postupem převést dokonce na rovnici prvního řádu.

Rovnice typu $y'' = f(y)$

Rovnici převedeme na rovnici prvního řádu vynásobením y' , čímž dostaneme rovnici $y'y'' = f(y)y'$, a její integrací podle y obdržíme rovnici prvního řádu

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int f(y) dy.$$

O platnosti integrace se můžeme přesvědčit derivací poslední rovnice podle x .

7.4 Lineární diferenciální rovnice (obecná)

Definice

Lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

kde tzv. **koefficienty** $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$ a **pravá strana** $f(x)$ jsou funkce proměnné x .

Poznámka

- Název je dán skutečností, že se na levé straně rovnice vyskytuje lineární výraz pro neznámou funkci y a pro její derivace.
- Obecná lineární diferenciální rovnice je v obecném případě obtížně řešitelná. Níže jsou uvedeny základní teoretické poznatky, které budou užitečné v následující kapitole pro řešení speciálního typu této rovnice, tzv. *lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*.

Věta

Jestliže funkce $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), f(x)$ jsou spojité v intervalu I , pak existuje právě jedno řešení uvedené rovnice definované v celém intervalu I , které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, kde $x_0 \in I$ a čísla $y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)}$ jsou libovolná reálná.

Definice

Rovnici $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, tj. rovnici bez pravé strany $f(x)$, nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnici** příslušnou k původní rovnici.

Věta

Libovolná lineární kombinace řešení homogenní lineární rovnice je také jejím řešením.

Důkaz

Přímým dosazením lineární kombinace řešení a využitím linearitu derivace.

Definice

Systém $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ v intervalu I lineárně nezávislých řešení homogenní lineární rovnice se nazývá **fundamentální systém** této rovnice.

Věta

Tvoří-li funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém homogenní lineární rovnice, pak obecný integrál této rovnice má tvar

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

kde c_1, c_2, \dots, c_n jsou libovolné konstanty.

Věta

Známe-li fundamentální systém $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ homogenní rovnice, pak obecný integrál nehomogenní rovnice má tvar

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p,$$

kde c_1, c_2, \dots, c_n jsou libovolné konstanty a y_p je jakékoliv řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice.

Důkaz

Stačí dosadit uvedené řešení do nehomogenní rovnice a opět využít její linearitu.

Poznámka

- Slovně řečeno, obecný integrál nehomogenní rovnice je součtem obecného integrálu rovnice homogenní a libovolného partikulárního integrálu rovnice nehomogenní.
- O tom, jak najít partikulární integrál nehomogenní rovnice, hovoří následující věta.

Věta (metoda variace konstant)

Partikulární integrál $y_p(x)$ nehomogenní rovnice lze hledat ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x),$$

tj. ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice, kde však veličiny c_1, c_2, \dots, c_n nepovažujeme za konstanty, ale za neznámé funkce proměnné x (tzv. **metoda variace konstant**). Dá se dokázat, že funkce $y_p(x)$ je hledaným řešením právě tehdy, vyhovují-li neznámé funkce $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ soustavě diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned}$$

Tuto soustavu řešíme obdobným postupem jako algebraické soustavy lineárních rovnic (eliminací, Cramerovým pravidlem apod.). Integrací získaných prvních derivací $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$ nakonec dostaneme hledané funkce $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ a následně partikulární řešení $y_p(x)$.

7.5 Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

V této kapitole je probrán samostatně v praxi velmi důležitý typ diferenciální rovnice vyššího řádu, totiž *lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*, u kterého lze obecně formulovat postup nalezení obecného řešení, což je, jak již bylo uvedeno, u jiných typů diferenciálních rovnic vyšších řádů velmi obtížné nebo nemožné.

Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Definice

Homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

kde koeficienty a_0, a_1, \dots, a_{n-1} jsou konstanty nezávislé na proměnné x .

Věta

Předpokládáme řešení ve tvaru $y = e^{\alpha x}$. Po dosazení do homogenní rovnice a vydělení rovnice výrazem $e^{\alpha x}$ obdržíme tzv. **charakteristickou rovnici**

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 = 0,$$

což je algebraická rovnice n -tého stupně pro neznámou α . Tato rovnice má právě n kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Mohou nastat dva případy:

- Všechny kořeny jsou navzájem různé; pak fundamentální systém homogenní rovnice je tvořen n funkcemi $y_1 = e^{\alpha_1 x}, y_2 = e^{\alpha_2 x}, \dots, y_n = e^{\alpha_n x}$.
- Je-li některý kořen α_k r -násobný, pak mu ve fundamentálním systému odpovídá r (lineárně nezávislých) funkcí $y_1 = e^{\alpha_k x}, y_2 = x e^{\alpha_k x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\alpha_k x}$.

Poznámka

Předchozí větou je nalezení fundamentálního systému vyřešeno až na jeden detail. Kořeny charakteristické rovnice mohou totiž být obecně komplexní, a pak jsou komplexní také příslušné funkce fundamentálního systému. Pokud pracujeme v reálném oboru (a to je náš případ), zajímají nás přednostně reálná řešení. Ukazuje se, že je možné nežádoucí komplexní řešení nahradit reálnými.

Jsou-li totiž konstanty a_0, a_1, \dots, a_{n-1} reálné, musí (jak plyne z teorie algebraických rovnic) ke každému komplexnímu kořenu $a + ib$ charakteristické rovnice existovat také kořen komplexně sdružený $a - ib$, a to stejné násobnosti. Místo abychom do fundamentálního systému vzali komplexní funkce $e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}$, použijeme jejich vhodné lineární kombinace, a to takové, aby výsledné funkce byly opět nezávislé, a přitom reálné. Vzpomeneme-li si na Eulerův vzorec z teorie komplexních čísel $e^{a \pm ib} = e^a (\cos b \pm i \sin b)$, je zřejmé, že nejjednodušší je vzít lineární kombinace $\frac{1}{2}(e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x}) = e^{ax} \cos bx$ a $\frac{1}{2i}(e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x}) = e^{ax} \sin bx$. Pokud jsou kořeny $a + ib, a - ib$ r -násobné, vezmeme dále do fundamentálního systému reálné funkce $x e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{r-1} e^{ax} \cos bx, x^{r-1} e^{ax} \sin bx$. Tím je problém nalezení *reálného* fundamentálního systému úspěšně uzavřen.

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Definice

Nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x),$$

kde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} jsou konstanty. Na pravé straně vystupuje funkce $f(x)$ různá od funkce nulové.

Poznámka

Z teorie obecné lineární diferenciální rovnice (viz předchozí kapitola) víme, že obecný integrál nehomogenní rovnice můžeme psát ve tvaru $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n + y_p$, kde $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ tvoří fundamentální systém homogenní rovnice, c_1, c_2, \dots, c_n jsou libovolné konstanty a y_p je jakékoliv řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice. Určit fundamentální systém homogenní rovnice již umíme stejně jako vypočítat partikulární integrál metodou variace konstant. Metoda variace konstant ale není vždy tou nejrychlejší a nejsnazší cestou. Pro některé funkce $f(x)$ (tzv. *speciální pravé strany*) můžeme totiž tvar partikulárního integrálu y_p předem určit a následně jednoduše dopočítat. Hovoří o tom následující věta.

Věta (speciální pravá strana)

Nechť pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty má tvar

$$f(x) = e^{ax} [P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx],$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou mnohočleny obecně různého, nejvýše však s -tého stupně s reálnými koeficienty a a , b jsou libovolná reálná čísla.

Jestliže není $a + ib$ (a tedy ani $a - ib$) kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$y_p = e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx],$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou (zatím neznámé) mnohočleny nejvýše s -tého stupně.

Obecněji, je-li $a + ib$ (a tedy i $a - ib$) r -násobným kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$y_p = x^r e^{ax} [R(x) \cos bx + S(x) \sin bx],$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou mnohočleny nejvýše s -tého stupně.

Poznámka

- Funkci $f(x) = e^{ax} [P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx]$ nazýváme v této souvislosti **speciální pravou stranou**.
- Uvedená speciální pravá strana zahrnuje širokou třídu funkcí, se kterou v praxi obvykle vystačíme. Tak např. pro $a = 0$, $b = 0$ přechází pravá strana v polynom $P(x)$, pro $a \neq 0$, $b = 0$ a $P(x) \equiv 1$ dostáváme na pravé straně exponenciální funkci e^{ax} , pro $a = 0$, $b \neq 0$, $P(x) = 1$ a $Q(x) = 0$ (resp. $P(x) = 0$ a $Q(x) = 1$) dostaneme $\cos bx$ (resp. $\sin bx$) apod.
- Z předchozí poznámky a poslední věty plyne, že je-li pravá strana ve tvaru polynomu, je třeba při hledání partikulárního integrálu vyšetřit, zda charakteristická rovnice nemá kořen 0 ($= 0 + i0$). Pokud je na pravé straně exponenciála e^{ax} , je nutné vyšetřit existenci kořene a ($= a + i0$), a pokud je na pravé straně funkce $\cos bx$ nebo $\sin bx$, je třeba učinit totéž pro hodnotu ib ($= 0 + ib$).
- Pozor na případ, kdy je na pravé straně pouze jedna z funkcí $\cos bx$, $\sin bx$. Partikulární integrál y_p musíme hledat (v souladu s poslední větou) ve tvaru, obsahujícím *obě* tyto goniometrické funkce.
- Provedeme-li správně určení tvaru partikulárního řešení y_p , pak jediné, co zbývá, je dopočítat zatím neznámé koeficienty polynomů $R(x)$ a $S(x)$. To provedeme následovně: Nejprve dosadíme předpokládaný tvar partikulárního integrálu y_p a jeho potřebné derivace do původní (nehomogenní) rovnice za neznámou y a její derivace. Obdržíme tak jednu rovnici pro neznámé koeficienty polynomů $R(x)$ a $S(x)$, kterou řešíme tzv. *metodou neurčitých koeficientů*. Tato z algebry známá metoda spočívá v porovnání koeficientů u jednotlivých lineárně nezávislých funkcí na obou stranách rovnice. Z provedeného porovnání obdržíme potřebný počet rovnic pro jednoznačné určení hledaných koeficientů polynomů $R(x)$ a $S(x)$. Výsledný partikulární integrál y_p je možné ověřit přímým dosazením do původní (nehomogenní) rovnice.
- Jestliže má pravá strana tvar součtu funkcí uvedeného speciálního tvaru (které se od sebe liší různou hodnotou čísel a , resp. b), je také partikulární integrál součtem příslušných partikulárních integrálů. Tyto partikulární integrály, příslušné jednotlivým sčítancům na pravé straně, lze hledat každý zvlášť (metodou popsanou výše) a výsledky sečíst.