PARCIÁLNÍ DERIVACE

PŘÍKLAD 1

Určete všechny první a druhé parciální derivace funkce

$$f(x,y,z) = z\ln\frac{x}{y}.$$

Řešení

Výpočet parciální derivace je snadný, umíme-li počítat derivace funkcí jedné reálné proměnné. Musíme si jen uvědomit, že při výpočtu parciální derivace pohlížíme na všechny proměnné kromě té, podle které právě derivujeme, jako na konstanty. A to ať už je jejich označení jakékoliv – x, y, z, a, b, ξ, η či dokonce ж nebo щ.

Pro první derivace funkce ze zadání můžeme tedy psát

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z\ln\frac{x}{y}\right) = z\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x - \ln y\right) = z\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln x - \frac{\partial}{\partial x}\ln y\right) = z\cdot\frac{1}{x} - z\cdot 0 = \underline{\underline{\frac{z}{x}}},$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z\ln\frac{x}{y}\right) = z\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln x - \ln y\right) = z\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln x - \frac{\partial}{\partial y}\ln y\right) = z\cdot 0 - z\cdot\frac{1}{y} = \underline{\underline{-\frac{z}{y}}},$$
- $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z\ln\frac{x}{y}\right) = \ln\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial z}z = \ln\frac{x}{y}\cdot 1 = \underline{\underline{\ln\frac{x}{y}}}.$$

Pro funkce tří proměnných existuje celkem devět (i když ne nutně různých) druhých parciálních derivací. Uveďme si výpočet alespoň některých z nich, zbytek přenecháváme čtenáři jako první jednoduché cvičení k tomuto příkladu.

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x}\right) = z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = z\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underline{\underline{-\frac{z}{x^2}}},$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x}\right) = \underline{\underline{0}},$$ [1]
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{z}{y}\right) = \underline{\underline{0}}.$$ [2]

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Určete všechny první a druhé parciální derivace zadaných funkcí, ověřte nezávislost druhých derivací na pořadí derivování.

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, b) $f(x,y) = e^x\cos y$, c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, e) $f(x,y) = x\ln y$, f) $f(x,y) = x^y$.

[1] Výraz z/x se chová při derivování podle y jako konstanta!

[2] Tento výpočet byl tak trochu zbytečný. Podle obecné věty víme, že záměna pořadí derivování ve výpočtu násobných parciálních derivací výsledek nezmění.

g) $f(x,y,z)=xyz$, h) $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$, i) $f(x,y,z)=z\,\mathrm{arctg}(xy)$.

2. Vypočítejte následující parciální derivace

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{z^2\ln y-\sin z}{y^z}\right)$, b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^x-y\ln x\right)$, c) $\dfrac{\partial}{\partial a}\left(b\cos a-a\cos b\right)$,

d) $\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\eta}-\eta^{\xi}\right)$, e) $\dfrac{\partial}{\partial a}\left(x\ln y-x^y\right)$, f) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(s+u\cos s\right)$.

PŘÍKLAD 2

Ověřte, že funkce $u(x,y)=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ vyhovuje rovnici $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

Řešení

Ověřit, že funkce vyhovuje zadané rovnici (udělat zkoušku), znamená dosadit do levé a pravé strany této rovnice a ověřit, že se obě strany po provedení naznačených operací rovnají.

V našem případě to znamená, že nejdříve musíme určit parciální derivace vyskytující se na levé straně (LS) rovnice

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,
- $\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Po jejich dosazení obdržíme

$$\mathrm{LS}\equiv x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\frac{x}{x^2+y^2}=-\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2}=0,$$

a protože i pravá strana (PS) rovnice je nulová, můžeme psát LS = PS. Platnost rovnice je proto ověřena.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1. Ověřte, že zadané funkce vyhovují uvedeným rovnicím.

a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$; b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $u(x,y)=e^{1/(x+y)}$;

c) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$, $u(x,y)=\ln\left(e^x+e^y\right)$; d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$, $u(x,y)=\cos(x-t)$.

Výsledky:

Cvičení k příkladu 1

1a)

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$.

1b)

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^x \sin y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$.

1c)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2 y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2 y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1 - x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2x^3 y}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2}$.

1d)

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2y}{(x - y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{(x - y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x - 2y}{(x - y)^3}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4y}{(x - y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x - y)^3}$.

1e)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}$.

1f)

$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y \ln x)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$.

1g)

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y$.

1h)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=3z^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0.$$

1i)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{zy}{1+x^2y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{zx}{1+x^2y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=arctg\left(xy\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{\left(1+x^2y^2\right)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{\left(1+x^2y^2\right)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{z\left(1-x^2y^2\right)}{\left(1+x^2y^2\right)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}.$$

2a) $\dfrac{z^2\ln y-\sin z}{y^z}$, 2b) $-\ln x$, 2c) $-b\sin a-\cos b$,

2d) $\eta\xi^{\eta-1}-\eta^{\xi}\ln\eta$, 2e) 0, 2f) 0.

<u>Cvičení k příkladu 2</u>

1a) $LS=0$, $PS=0$, $LS=PS$. 1b) $LS=0$, $PS=0$, $LS=PS$.

1c) $LS=1$, $PS=1$, $LS=PS$. 1d) $LS=0$, $PS=0$, $LS=PS$.