DERIVACE VE SMĚRU

PŘÍKLAD 1

Určete gradient funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ v zadaném bodě $\vec{a}=(a_x,a_y)\neq\vec{0}$. Řešte nejdříve obecně a pak dosaďte $\vec{a}=(2,3)$.

Řešení

Gradient funkce $f(x,y)$ v bodě (a_x,a_y) je definován jako vektor, jehož složky jsou dány odpovídajícími parciálními derivacemi zadané funkce v zadaném bodě

$$\nabla f(a_x,a_y)\equiv\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a_x,a_y),\frac{\partial f}{\partial y}(a_x,a_y)\right].$$

Při jeho výpočtu musíme tedy nejdříve určit všechny potřebné parciální derivace

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_x,a_y)=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}}$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_x,a_y)=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}}$.

Pak můžeme psát

$$\nabla f(a_x,a_y)\equiv\left[\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}}\right]=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}}\left[a_x,a_y\right]}}$$

nebo po dosazení konkrétního bodu $\vec{a}=(2,3)$

$$\nabla f(2,3)\equiv\left[\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}},\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}\right]=\left[\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right].$$

Protože gradient funkce definuje v zadaném bodě směr jejího maximálního růstu, můžeme říci, že naše funkce vykazuje v bodě $\vec{a}=(2,3)$ maximální přírůstek právě ve směru zadaném vektorem $[2/\sqrt{13},3/\sqrt{13}]$. Shodou okolností má tento vektor jednotkovou délku (ověřte). Obecně to však neplatí. Pokud bychom chtěli i v obecném případě zadat směr maximálního přírůstku funkce jednotkovým vektorem, museli bychom místo prostého gradientu použít vektor

$$\vec{n}=\frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Nalezněte gradient zadané funkce v zadaném bodě.

a) $f(x,y)=(x+y)^{-1/2}$, $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $a_x\neq -a_y$;

b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $\vec{a}=(1,2)$

c) $f(x,y,z)=(x+y+z)^{-1}$, $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $a_x+a_y+a_z\neq 0$;

d) $f(x_1,x_2,x_3)=\ln\left(\frac{x_1x_2}{x_3}\right)$, $x_1,x_2,x_3>0$.

2. Nalezněte jednotkový vektor, který definuje směr maximálního přírůstku zadané funkce v zadaném bodě.

a) $f(x,y)=x^2+y$, $\vec{a}=(-1,1)$; b) $f(x,y)=x^y$, $\vec{a}=(1,1)$;

c) $f(x,y,z)=xyz$, $\vec{a}=(a,b,a)$; d) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2$, $\vec{a}=(a,a,a)$.

PŘÍKLAD 2

Určete derivaci funkce $f(x,y)=x^2-y^2$ v bodě $\vec{a}=(1,1)$ ve směru zadaném vektorem $\vec{n}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Řešení

Dříve, než zahájíme výpočet zadané derivace, musíme vždy ověřit, že vektor definující směr má jednotkovou délku

$$\|\vec{n}\|\equiv\sqrt{n_x^{\ 2}+n_y^{\ 2}}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}}=1\,.$$

Pokud by tomu tak nebylo, museli bychom při výpočtu použít vektoru nového

$$\vec{n}'=\vec{n}/\|\vec{n}\|\,.$$

Derivaci funkce $f(x,y)$ v zadaném bodě $\vec{a}$ a ve směru definovaném jednotkovým vektorem $\vec{n}$ počítáme podle vzorce

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(\vec{a})\equiv n_x\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})+n_y\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\,.$$

Program výpočtu je jasný – nejdříve opět počítáme potřebné parciální derivace

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)=2x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^2\right)=-2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-2$,

a poté dosazujeme do obecného vzorce

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(\vec{a})\equiv\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2+\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-2\right)=\tfrac{4}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{2\sqrt{2}}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1. Určete derivaci ve směru zadané funkce v zadaném bodě. Ověřte vždy, že vektor definující směr je jednotkový, popř. k jednotkovému vektoru přejděte.

a) $f(x,y)=x+2y$, $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{n}=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$;

b) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{n}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$; [1]

c) $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$, $\vec{a}=(0,1,2)$, $\vec{n}=(1,0,1)$;

d) $f(x,y,z)=x+y+z$, $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{n}=(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta)$. [1]

[1] $\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$, $\theta\in\langle 0,\pi\rangle$.

Výsledky:

Cvičení k příkladu 1

1a) $-\dfrac{1}{2\left(a_x+a_y\right)^{\frac{3}{2}}}[1,1]$,

1b) $\left[\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5}\right]$,

1c) $-\dfrac{1}{\left(a_x+a_y+a_z\right)^2}[1,1,1]$,

1d) $\left[\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},-\dfrac{1}{x_3}\right]$.

2a) $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right]$,

2b) $[1,0]$,

2c) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+2b^2}}[b,a,b]$,

2d) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}[1,2,1]$.

Cvičení k příkladu 2

1a) $\sqrt{5}$,

1b) $2a_x\cos\varphi+2a_y\sin\varphi$,

1c) $\dfrac{13\sqrt{2}}{2}$,

1d) $\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta$.