TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

PŘÍKLAD 1

Pomocí věty o totálním diferenciálu nahraďte na okolí bodu $\vec{a}=(3,-2)$ funkci $f(x,y)=x^2+y^2$ funkcí lineární.

Řešení

Obecný vzorec pro náhradu funkce $f(x,y)$ na okolí bodu $\vec{a}=(a_x,a_y)$ funkcí lineární zní

$$f(x,y)\approx f(a_x,a_y)+\frac{\partial f}{\partial x}(a_x,a_y)\cdot(x-a_x)+\frac{\partial f}{\partial y}(a_x,a_y)\cdot(y-a_y).$$

Uvědomíme-li si tedy, že

- $f(a_x,a_y)=3^2+(-2)^2=9+4=13$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a_x,a_y)=2a_x=2\cdot 3=6$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a_x,a_y)=2a_y=2\cdot(-2)=-4$,

můžeme v našem případě psát

$$f(x,y)\approx 13+6\cdot(x-3)+(-4)\cdot(y-(-2))=\underline{\underline{6x-4y-13}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Pomocí věty o totálním diferenciálu nahraďte uvedené funkce na okolí zadaného bodu funkcí lineární.

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\vec{a}=(0,0)$;

b) $f(x,y)=\cos(x-y)$, $\vec{a}=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$;

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x+y+z}$, $\vec{a}=(1,1,1)$;

d) $f(x,y,z)=\ln(x+y^2+z^3)$, $\vec{a}=(1,2,3)$.

PŘÍKLAD 2

Pomocí věty o totálním diferenciálu určete přibližně $3{,}05^{0{,}99}$.

Řešení

Je zřejmé, že zadaný výpočet můžeme provést i bez použití kalkulačky pomocí totálního diferenciálu funkce $f(x,y)=x^y$ v bodě $\vec{a}=(3,1)$. K tomu potřebujeme znát

- $f(3,1)=3^1=3$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}x^y=yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=1\cdot 3^{1-1}=1$,

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}x^y=x^y\ln x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1)=3^1\cdot\ln 3=3\cdot\ln 3\doteq 1{,}0986\cdot 3=3{,}2958$. [1]

Pak můžeme totiž psát

$$x^y\approx 3+1\cdot(x-3)+3{,}2958\cdot(y-1)$$

a po dosazení i

$$3{,}05^{0{,}99}\approx 3+1\cdot(3{,}05-3)+3{,}2958\cdot(0{,}99-1)=3+0{,}05-0{,}032958\doteq \underline{\underline{3{,}0170}}.$$ [2]

PŘÍKLAD 3

Určete, o kolik se prodlouží přepona pravoúhlého trojúhelníka, jestliže se jeho jedna odvěsna o délce 4 km prodlouží o 9 nm a druhá o délce 3 km prodlouží o 3 nm.

Řešení

Výpočet bychom se mohli pokusit zajisté provést i bez použití matematické analýzy. Hledaná změna je přece rovna (v km) [3]

$$\sqrt{(4+9\cdot 10^{-12})^2+(3+3\cdot 10^{-12})^2}-\sqrt{4^2+3^2}\,.$$

Bohužel ale kalkulačka, která počítá s přesností horší než na dvanáct třináct desetinných míst, dá při vyčíslení rozdílu „čistou nulu“. Důvod spočívá ve faktu, že se snažíme odečíst dvě velká, ale jen velmi málo odlišná čísla.

Tomuto problému numerické povahy se můžeme vyhnout, uvědomíme-li si, že délka přepony v pravoúhlém trojúhelníku je podle Pythagorovy věty dána funkcí

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

kde x a y označují délky jeho odvěsen. Naším úkolem je tedy spočítat rozdíl $f(x,y)-f(4,3)$ a k jeho přibližnému vyčíslení můžeme použít větu o totálním diferenciálu

$$f(x,y)-f(4,3)\approx\frac{\partial f}{\partial x}(4,3)\cdot(x-4)+\frac{\partial f}{\partial y}(4,3)\cdot(y-3)\,.$$

Protože

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(4,3)=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4}{5}$,

---

[1] Hodnotu ln 3 jsme vypočítali pomocí kalkulačky. Pokud bychom se i nadále chtěli bez kalkulačky obejít, mohli bychom použít např. větu o prvním diferenciálu (viz *Breviář* str. 19) aplikovanou na funkci $\ln x$ na okolí bodu e

$$\ln x\approx \ln e+\tfrac{1}{e}(x-e)=1+\tfrac{1}{e}(x-e)\,,$$

neboli

$$\ln 3\approx 1+\tfrac{1}{e}(3-e)\doteq 1+\tfrac{1}{2.718281828}(3-2{,}718281828)\doteq 1{,}1036\,.$$

Pokud by nám dosažená přesnost nevyhovovala, mohli bychom provést upřesnění pomocí dalších členů Taylorova rozvoje.

[2] Porovnejte hodnotou získanou pomocí kalkulačky $3{,}05^{0{,}99}\doteq 3{,}0162$.

[3] 1 nm = 10^{-12} km

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(4,3) = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$,

můžeme psát

$$f(x,y) - f(4,3) \approx \frac{4}{5}\cdot 9\cdot 10^{-12} + \frac{3}{5}\cdot 3\cdot 10^{-12} = \underline{9\cdot 10^{-12}\ \text{km}} = \underline{\underline{9\ \text{nm}}}\,.$$

Prodloužení přepony zmíněného trojúhelníka bude tedy přibližně 9 nm.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 2 A 3

1. Pomocí věty o totálním diferenciálu určete přibližně:

a) $\sqrt{3,97}\cdot\cos 62^{\circ}$ (stupně převeďte nejdříve na radiány);

b) $\sqrt{1,01^2+3,05^2}$ ($\sqrt{10}$ určete jednak pomocí kalkulačky, ale i s využitím prvního diferenciálu funkce $f(x)=\sqrt{x}$ na okolí bodu 9);

a) změnu objemu válce o poloměru podstavy 2 m a výšce 10 m, jestliže se jeho poloměr zmenší o 3 μm a výška zvětší o 0,05 mm;

d) změnu plošného obsahu rovnoramenného trojúhelníka, jestliže se původní velikost jeho ramene (10 cm) zmenší o 5% a vrcholový úhel (původně 60°) zvětší o 2%;

e) změnu výsledného odporu dvou paralelně zapojených odporů ($R_1 = 100\,\Omega$ a $R_2 = 50\,\Omega$), jestliže se velikost prvního zvětší o 1% a velikost druhého zmenší o 3%;

f) změnu objemu rotačního elipsoidu o poloosách *a* = 1 m a *b* = 0,5 m, jestliže se první i druhá poloosa zvětší o 2 μm ($V=\frac{4}{3}\pi ab^2$);

g) změnu objemu elipsoidu o poloosách *a* = 1 m, *b* = 2 m a *c* = 3 m, jestliže se první, druhá i třetí poloosa zmenší o 3 mm ($V=\frac{4}{3}\pi abc$).

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1a) $f(x,y)\approx 0$,

1b) $f(x,y)\approx \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{\pi}{12}$,

1c) $f(x,y,z)\approx \sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)+\frac{\sqrt{3}}{6}(y-1)+\frac{\sqrt{3}}{6}(z-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}(x+y+z)$,

1d) $f(x,y,z)\approx \ln 32+\frac{1}{32}(x-1)+\frac{1}{8}(y-2)+\frac{27}{32}(z-3)=\ln 32-\frac{90}{32}+\frac{1}{32}x+\frac{1}{8}y+\frac{27}{32}z$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 2 A 3

1a) $0,93579$;	1b) $3,212874103$; $3,217192982$;
1c) $2,513274123\cdot 10^{-4}$;	1d) $-3,79343\ \text{cm}^2$;
1e) $-0,5\ \Omega$ **;**	1f) $1,047197551\cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$;
1g) $-0,138230076\ \text{m}^3$.	