DVOJNÉ INTEGRÁLY NA INTERVALECH

PŘÍKLAD 1

Vypočítejte $\iint\limits_{K}\left(xe^{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $K=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$.

Řešení

Násobné integrály počítáme obvykle pomocí Fubiniovy věty. Pro dvojný integrál obecné funkce *f* na intervalu $K=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$ je možno tuto větu zapsat ve tvaru

$$\iint\limits_{K} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

přičemž volba pořadí postupných integrací na pravé straně je ponechána zcela na naší libovůli (oběma postupy dospějeme ke stejnému výsledku) a je podřízena obvykle požadavku maximálního zjednodušení výpočtu.

V našem konkrétním zadání je

- $f(x,y)=xe^{x+y}$,
- $K=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$, čili $a=c=0$ a $b=d=1$,

a můžeme proto psát např.

$$\iint\limits_{K} xe^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Ve vnitřním integrálu pravé strany je integrační proměnnou *y*, na *x* tedy pohlížíme během jeho výpočtu jako na konstantu

$$\int\limits_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}y=x\int\limits_0^1 e^{x+y}\,\mathrm{d}y=\begin{bmatrix} z=x+y \\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}x\end{bmatrix}=x\int\limits_x^{x+1} e^z\,\mathrm{d}z=x\left[e^z\right]_x^{x+1}=x\left(e^{x+1}-e^x\right)=xe^{x+1}-xe^x.$$

Po dosazení do vnějšího integrálu získáme dále

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(xe^{x+1}-xe^x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 xe^{x+1}\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x=e\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x=(e-1)\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x & v'=e^x \\ u'=1 & v=e^x\end{bmatrix}=(e-1)\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x\right)=(e-1)\left(\left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1\right)=(e-1)\left(e-[e-1]\right)=$$

$$=(e-1)$$

a výpočet můžeme uzavřít konečným výsledkem

$$\underline{\underline{\iint\limits_{K} xe^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=e-1.}}$$

Při použití Fubiniovy věty bychom mohli dát přednost opačnému pořadí postupných integrací na pravé straně, vzorce. Výpočet by v takovém případě vypadal následovně

- $\iint\limits_K xe^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$,
- $\int\limits_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x & v' = e^{x+y} \\ u' = 1 & v = e^{x+y}\end{bmatrix} = \left[xe^{x+y}\right]_{x=0}^{x=1} - \int\limits_0^1 e^{x+y}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} z = x+y \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x\end{bmatrix} = \left[xe^{x+y}\right]_{x=0}^{x=1} - \int\limits_y^{y+1} e^z\,\mathrm{d}z =$
  $= \left[xe^{x+y}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[e^z\right]_y^{y+1} = e^{y+1} - \left[e^{y+1} - e^y\right] = e^y$,
- $\int\limits_0^1 e^y \mathrm{d}y = \left[e^y\right]_0^1 = e - 1$,
- $\iint\limits_K xe^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = e - 1$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Pomocí Fubiniovy věty vypočítejte následující dvojné integrály:

a) $\iint\limits_K \left(x^2 + 2y^2 - xy + 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 1,2\rangle \times \langle 2,3\rangle$;

b) $\iint\limits_K y\sin x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$;

c) $\iint\limits_K x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 1,2\rangle \times \langle 1,2\rangle$;

d) $\iint\limits_K \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 0,\pi/4\rangle \times \langle 0,\pi/4\rangle$;

e) $\iint\limits_K \left(x + y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$;

f) $\iint\limits_K xy\sin x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle -\pi/2,\pi/2\rangle \times \langle 0,\pi/4\rangle$;

g) $\iint\limits_K (ax + by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 0,\alpha\rangle \times \langle 0,\beta\rangle$, a, b, α, β jsou zadané konstanty $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$;

h) $\iint\limits_K \left(ax^2 + by^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle -\alpha,\ \alpha\rangle \times \langle -\beta,\ \beta\rangle$, a, b, α, β jsou zadané konstanty $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$;

i) $\iint\limits_K xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle \alpha - \Delta,\ \alpha + \Delta\rangle \times \langle \beta - \Delta,\ \beta + \Delta\rangle$, α, β, Δ jsou zadané konstanty $(\Delta > 0)$;

●j) $\iint\limits_K \sin\left(k_x x + k_y y + \varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $K = \langle 0, 2\pi/k_x\rangle \times \langle 0, 2\pi/k_y\rangle$, k_x, k_y, φ jsou zadané konstanty $\left(k_x k_y \neq 0\right)$.

2. Dvojný integrál $\iint_K f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **udává objem tělesa ležícího pod grafem funkce** f **na množině K. Pomocí dvojného integrálu určete objemy následujících těles:**

a) $f(x,\ y) = x + 1/y$, $K = \langle 0,\ 1\rangle \times \langle 1,\ 2\rangle$;

b) $f(x,\ y) = y/(x+y)^2$, $K = \langle 1,\ 2\rangle \times \langle 1,\ 2\rangle$;

c) kvádru o hranách a, b a c;

●d) trojbokého hranolu, jehož podstavu tvoří rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o odvěsně a a jehož stěny jsou obdélníky o stranách a, resp. $\sqrt{2}a$; [1]

●●e) trojbokého hranolu, jehož podstavu tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a a jehož stěny jsou obdélníky o stranách a a b..

Pozn.: Výsledky cvičení naleznete v příslušné kapitole staré verze příkladů.

[1] Hranol orientujte tak, že jeho obdélníková stěna odpovídající odvěsně a podstavy bude ležet v souřadnicové rovině xy.

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1a) $\frac{49}{4}$,	1b) $\frac{\pi^2}{4}$,
1c) $\frac{49}{9}$,	1d) $\sqrt{2}-1$,
1e) $\frac{11}{3}$,	1f) $\frac{\pi^2}{16}$,
1g) $\frac{a\alpha^2\beta}{2}+\frac{b\alpha\beta^2}{2}$,	1h) $\frac{4a\alpha^3\beta}{3}+\frac{4b\alpha\beta^3}{3}$,
1i) $4\alpha\beta\Delta^2$,	1j) 0.
2a) $\frac{1}{2}+\ln 2$,	2b) $5\ln 2-3\ln 3$,
2c) abc,	2d) $\frac{a^3}{2}$,
2e) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$.	