DVOJNÉ INTEGRÁLY NA OBECNĚJŠÍCH MNOŽINÁCH

PŘÍKLAD 1

Vypočítejte $\iint\limits_{M} x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0,\ 1 \rangle \ \wedge \ x^2 \le y \le x \right\}$.

Řešení

Dvojný integrál funkce $f(x, y)$ na množině typu

$$\mathrm{M} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a,\ b \rangle \ \wedge \ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\}$$

počítáme podle Fubiniovy věty pomocí vzorce

$$\iint\limits_{M} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

v němž ale tentokrát musíme dodržet pořadí postupných integrací na pravé straně.

Z konkrétního zadání příkladu vidíme, že

- $f(x, y) = x^2 y$,
- $a = 0$ a $b = 1$,
- $\varphi(x) = x^2$ a $\psi(x) = x$.

Po dosazení do obecného vzorce můžeme proto psát

$$\iint\limits_{M} x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Další postup je stejný jako při výpočtu dvojného integrálu na intervalu – nejdříve určíme vnitřní integrál na pravé straně[1] a získaný mezivýsledek dosadíme do integrálu vnějšího:

- $\int_{x^2}^{x} x^2 y \,\mathrm{d}y = x^2 \int_{x^2}^{x} y \,\mathrm{d}y = x^2 \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{x} = \tfrac{1}{2} x^2 \left(x^2 - x^4 \right) = \tfrac{1}{2} \left(x^4 - x^6 \right)$,
- $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \tfrac{1}{2} \left(x^4 - x^6 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left(x^4 - x^6 \right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{7} x^7 \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} \right) = \tfrac{1}{35}$.

Po provedení všech nezbytných výpočtů můžeme tedy uzavřít tvrzením

$$\underline{\underline{\iint\limits_{M} x^2 y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \tfrac{1}{35}}}.$$

[1] Při integraci podle y nahlížíme na x jako na konstantu!

PŘÍKLAD 2

Vypočítejte $\iint_N \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $N=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\langle 0,\,1\rangle \ \wedge\ 0\le x\le y^2\right\}$.

Řešení

I pro dvojný integrál funkce $f(x,y)$ na množině typu

$$N=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\langle c,\,d\rangle \ \wedge\ \chi(y)\le x\le \omega(y)\right\}$$

poskytuje Fubiniova věta návod, jak jej počítat

$$\iint_N f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_{\chi(y)}^{\omega(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,.$$

Vzhledem k tomu, že další postup je zcela obdobný tomu, který jsme podrobně nastínili v příkladu 1, můžeme si dovolit být struční:

- $f(x,y)=\sqrt{1+y^3}$, $c=0$, $d=1$, $\chi(y)=0$, $\omega(y)=y^2$,
- $\iint_N \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$,
- $\int_0^{y^2}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+y^3}\int_0^{y^2}1\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+y^3}\,[x]_0^{y^2}=y^2\sqrt{1+y^3}$,
- $\int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1 y^2\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}y=\begin{bmatrix} z=1+y^3\\ \mathrm{d}z=3y^2\mathrm{d}y\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int_1^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_1^2=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$,

a proto

$$\iint_N \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1. Pomocí Fubiniovy věty vypočítejte následující dvojné integrály:

a) $\iint_M y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle -1,\,1\rangle \wedge -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$;

b) $\iint_M x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\left\langle 0,\,\frac{\pi}{2}\right\rangle \wedge 0\le x\le\cos y\right\}$;

c) $\iint_M \left(4-y^2\right)^{3/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\langle 0,\,2\rangle \wedge 0\le x\le y\right\}$;

d) $\iint_M \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\in\langle 0,\,2\rangle \wedge 0\le y\le x\right\}$.

2. Dvojný integrál $\iint_{\mathrm{M}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ udává plošnou míru (obsah) množiny M. Pomocí dvojných integrálů určete plošné obsahy následujících množin (rovinných útvarů):

a) $\mathrm{M} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge x^2 \le y \le \sqrt{x} \right\}$;

b) $\mathrm{M} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \pi/4 \le x \le 5\pi/4 \wedge \cos x \le y \le \sin x \right\}$;

c) $\mathrm{M} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : y^n \le x \le \sqrt[n]{y} \wedge 0 \le y \le 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$;

d) obdélníku o stranách a a b;

e) kruhu o poloměru R;

f) elipsy o poloosách a a b;

●g) trojúhelníku o vrcholech $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c_1, c_2]$, kde b, c_1 a c_2 jsou zadané konstanty, $b > 0$, $0 < c_1 < b$, $0 < c_2$.

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 A 2

1a) 0,

1b) $\frac{1}{6}$,

1c) $\frac{32}{5}$,

1d) $\frac{8}{3}$.

2a) $\frac{1}{3}$,

2b) $2\sqrt{2}$,

2c) $\frac{n-1}{n+1}$,

2d) ab,

2e) πR^2,

2f) πab,

2g) $\frac{bc_2}{2}$.