SUBSTITUCE VE DVOJNÝCH INTEGRÁLECH

PŘÍKLAD 1

Pomocí přechodu do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ vypočítejte $\iint\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M} = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4 \ \wedge\ x \ge 0 \ \wedge\ y \ge 0\right\}$.

Řešení

Obecný vzorec pro přechod do polárních souřadnic ve dvojném integrálu funkce $f(x,y)$ na části kruhu M se středem v počátku souřadnic má tvar

$$\iint\limits_{\mathrm{M}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,$$

kde meze r_1, r_2, φ_1 a φ_2 vymezují integrační množinu M. V našem případě je

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,
- $r_1 = 0$ a $r_2 = 2$, [1]
- $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = \pi/2$. [2]

Můžeme tedy psát

$$\iint\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\; r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2} r^2\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^2\left(\int\limits_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int\limits_0^2\left(r^2\int\limits_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int\limits_0^2\left(r^2\left[\varphi\right]_0^{\pi/2}\right)\mathrm{d}r = \tfrac{\pi}{2}\int\limits_0^2 r^2\mathrm{d}r = \tfrac{\pi}{2}\left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^2 =$$

$$= \underline{\underline{\tfrac{4}{3}\pi}}.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Pomocí přechodu do polárních souřadnic vypočítejte:

a) $\iint\limits_{\mathrm{M}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M} = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1 \ \wedge\ y \ge 0\right\}$;

b) $\iint\limits_{\mathrm{M}} \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M} = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$;

c) $\iint\limits_{\mathrm{M}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M} = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \le x^2+y^2 \le R_2^2\right\}$, kde R_1, R_2 jsou kladné konstanty, $R_1 < R_2$;

d) $\iint\limits_{\mathrm{M}} \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M} = \left\{[x,\ y] \in \mathbb{R}^2 : R^2 \le x^2+y^2 < +\infty\right\}$, kde R je kladná konstanta.

<u>Návody:</u> a) $r_1 = 0, r_2 = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$; b) $r_1 = 0, r_2 = 1, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2$;
c) $r_1 = R_1, r_2 = R_2, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$; d) $r_1 = R, r_2 = +\infty, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$.

---

[1] Pro vzdálenost r bodu $[x,y]$ od počátku souřadnic platí $r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$, proto $0 \le r \le 2$.

[2] Množina M je čtvrtkruh z prvního kvadrantu kartézské souřadnicové soustavy.

●2. Dvojný integrál $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ udává objem tělesa ležícího pod grafem funkce f na množině M. Pomocí dvojného integrálu a s použitím substituce do polárních souřadnic určete objemy následujících těles:

a) válce o poloměru R a výšce h;
b) kužele o poloměru podstavy R a výšce h;
c) koule o poloměru R;
d) rotačního elipsoidu o poloosách a a b.

Návody: b) Ukažte nejdříve, že rovnice pláště kužele má tvar $f(x,\ y) = h - (h/R)\sqrt{x^2 + y^2}$.
c) Vypočítejte nejdříve objem (horní) polokoule.
d) Rovnici elipsoidu uvažujte ve tvaru $(x/a)^2 + (y/a)^2 + (z/b)^2 = 1$. Pomocí dvojného integrálu určete nejdříve objem (horního) poloelipsoidu.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1a) 0 ,

1b) $\dfrac{\pi}{2}(1-\ln 2)$,

1c) $\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$,

1d) $\dfrac{\pi}{R^2}$.

2a) $\pi R^2 h$,

2b) $\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$,

2c) $\dfrac{4}{3}\pi R^3$,

2d) $\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$.