SUBSTITUCE V TROJNÝCH INTEGRÁLECH

PŘÍKLAD 1

Pomocí substituce do válcových souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ a $z = z$ vypočítejte $\iint\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ 1\le x^2+y^2\le 4\ \wedge\ 0\le z\le 1\}$.

Řešení

Obecný vzorec pro přechod do válcových souřadnic v trojném integrálu funkce $f(x,y,z)$ na části válce M s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osu z a se středem podstavy v počátku souřadnic má tvar

$$\iiint\limits_{\mathrm{M}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\,,$$

kde meze r_1, r_2, φ_1, φ_2, z_1 a z_2 vymezují část válce, na které integraci provádíme. V našem případě je

- $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$,
- $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$ (protože $x^2+y^2 = r^2$),
- $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = 2\pi$,
- $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$.

Můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \ldots = \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{1} r^2\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{1} r^2\ \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{0}^{2\pi} r^2\,[\mathrm{z}]_0^1\ \mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int\limits_{1}^{2}\left(r^2\,[\varphi]_0^{2\pi}\right)\mathrm{d}r = 2\pi\left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \underline{\underline{\tfrac{14}{3}\pi}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1. Pomocí přechodu do válcových souřadnic vypočítejte:

a) $\iiint\limits_{\mathrm{M}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R_1^2\le x^2+y^2\le R_2^2\ \wedge\ 0\le z\le h\}$, kde R_1, R_2 a h jsou kladné konstanty, $R_1<R_2$;

b) $\iiint\limits_{\mathrm{M}} \left(x^2+y^2\right)^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R^2\le x^2+y^2<+\infty\ \wedge\ z\in\langle 0,h\rangle\}$, kde R a h jsou kladné konstanty;

2. Trojný integrál $\iiint_{\mathrm{M}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ udává objem množiny M. Pomocí trojného integrálu a s využitím substituce do válcových souřadnic určete objemy následujících těles:

a) válce o poloměru R a výšce h;

b) válcové vrstvy o vnitřním poloměru podstavy R_1, vnějším poloměru R_2 ($R_2 > R_1$) a výšce h.

PŘÍKLAD 2

Pomocí substituce do sférických souřadnic $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$ a $z = r\cos\theta$ vypočítejte $\iiint\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$.

Řešení

Obecný vzorec pro přechod do sférických souřadnic má pro trojný integrál funkce $f(x,y,z)$ na části koule M se středem v počátku souřadnic má tvar

$$\iiint\limits_{\mathrm{M}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\,,$$

kde meze r_1, r_2, φ_1, φ_2, θ_1 a θ_2 vymezují část koule, na které integraci provádíme. V našem případě je

- $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
- $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$, (protože tentokrát $x^2+y^2+z^2 = r^2$)
- $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = 2\pi$,
- $\theta_1 = 0$ a $\theta_2 = \pi$,

a můžeme proto psát

$$\iiint\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{(r\cos\varphi\sin\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2}\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \ldots = \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = \int_1^2\left(\int_0^{2\pi} r^3\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r = 2\int_1^2 r^3\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}r = 4\pi\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_1^2 = \underline{\underline{15\pi}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1. Pomocí přechodu do sférických souřadnic vypočítejte:

a) $\iiint\limits_{\mathrm{M}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R_1^2\le x^2+y^2+z^2\le R_2^2\right\}$, kde R_1 a R_2 jsou kladné konstanty, $R_1<R_2$;

b) $\iiint\limits_{\mathrm{M}} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R^2\le x^2+y^2+z^2<+\infty\right\}$, kde R je kladná konstanta.

2. Pomocí trojného integrálu a s využitím substituce do sférických souřadnic určete objemy následujících těles:

a) koule o poloměru R;

b) kulové vrstvy o vnitřním poloměru R_1 a vnějším poloměru R_2 ($R_2 > R_1$).

Výsledky:

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 1

1a) $\pi h\left(R_2^2 - R_1^2\right)$, 1b) $\dfrac{\pi h}{R^2}$,

2a) $\pi R^2 h$, 2b) $\pi h\left(R_2^2 - R_1^2\right)$.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 2

1a) $\dfrac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)$, 1b) $\dfrac{4\pi}{R}$,

2a) $\dfrac{4}{3}\pi R^3$, 2b) $\dfrac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)$.