GEOMETRICKÉ APLIKACE INTEGRÁLNÍHO POČTU

PŘÍKLAD 1

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Plocha pod grafem nezáporné funkce $f(x)$ se na intervalu $\langle a, b \rangle$ počítá podle vzorce

$$S(f; a, b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Funkce sinus na zadaném intervalu nezáporná je, takže můžeme psát

$$S(\sin x; 0, \pi) = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = \underline{\underline{2}} .$$

Plocha pod grafem funkce sinus na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ činí tedy 2 měrné jednotky.

PŘÍKLAD 2

Určete plochu mezi grafem funkce $f(x) = \cos x$ a osou x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Funkce kosinus není na zadaném intervalu nezáporná, nelze tedy bezprostředně použít vzorec z příkladu 1. Z náčrtku ale snadno zjistíme, že plochu mezi grafem funkce, která na zadaném intervalu mění znaménko, a osou x můžeme určit pomocí mírně modifikovaného vzorce

$$S(f; a, b) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x .$$

Platnost vzorce snadno nahlédneme, uvědomíme-li si, že absolutní hodnota „překlápí“ graf záporné funkce kolem osy x a graf funkce nezáporné ponechává beze změny.[1]

Pro naše konkrétní zadání můžeme tedy psát[2]

$$S(\cos x; 0, \pi) = \int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} |\cos x|\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} - \left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \left(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\pi - \sin\tfrac{\pi}{2}\right) = (1-0) - (0-1) = \underline{\underline{2}} .$$

---

[1] Pro nezápornou funkci tedy uvedený vzorec přechází na vzorec z příkladu 1.

[2] Využijeme větu o aditivitě pro určité integrály (viz *Breviář* str. 50) a integrační obor rozdělíme tak, aby na jeho částech už integrovaná funkce znaménko neměnila.

PŘÍKLAD 3

Určete plochu vymezenou grafy funkcí $f(x)=\cos x$ a $g(x)=\sin x$ na intervalu $\langle \pi/4, 5\pi/4\rangle$.[3]

Řešení

Plochu vymezenou na zadaném intervalu $\langle a,b\rangle$ grafy funkcí g a f počítáme podle vzorce [4]

$$S(g,f;a,b)=\int_a^b \left|g(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x\,.$$

Pro naše konkrétní zadání můžeme proto psát[5]

$$S(\sin x,\cos x;\pi/4,5\pi/4)=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\left(\sin x-\cos x\right)\mathrm{d}x=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4}=$$

$$=\left[-\cos\tfrac{5\pi}{4}-\sin\tfrac{5\pi}{4}-\left(-\cos\tfrac{\pi}{4}-\sin\tfrac{\pi}{4}\right)\right]=\left[-(-\tfrac{\sqrt2}{2})-(-\tfrac{\sqrt2}{2})+\tfrac{\sqrt2}{2}+\tfrac{\sqrt2}{2}\right]=4\tfrac{\sqrt2}{2}=\underline{\underline{2\sqrt2}}\,.$$

PŘÍKLAD 4

Pomocí integrálního počtu určete plošný obsah oblasti ohraničené elipsou o poloosách a a b.

Řešení

Elipsa o poloosách a a b, v hlavním postavení a se středem v počátku souřadnic (poloosa a ve směru souřadnicové osy x a b ve směru y) je zadána rovnicí

$$\left(x/a\right)^2+\left(y/b\right)^2=1,$$

neboli

$$|y|=b\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}\,.$$

Plošný obsah oblasti vymezené takovou elipsou je proto roven dvojnásobku plochy pod grafem funkce $f(x)=b\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}$ na intervalu $\langle -a,a\rangle$:

---

[3] Samostatně načrtněte oba grafy i jimi vymezenou plochu.

[4] Snadno se dá pomocí náčrtku ukázat platnost uvedeného vzorce pro nezáporné funkce $g(x)\ge f(x)\ge 0$, kdy přechází na

$$S(g,f;a,b)=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x\,,$$

jakož i rozšířit jeho platnost na obecné funkce splňující $g(x)\ge f(x)$. Tehdy stačí k oběma funkcím přičíst dostatečně velkou kladnou konstantu, aby se staly nezápornými, a uvědomit si, že

$$\left(g(x)+C\right)-\left(f(x)+C\right)=g(x)-f(x)$$

a že se posunutím ve směru osy y velikost plochy mezi dvěma grafy nemění. Je-li $g(x)\le f(x)$, tj. leží-li graf funkce *g* pod grafem funkce *f*, stačí jistě prohodit obě funkce a psát

$$S(f,g;a,b)=S(g,f;a,b)=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x\,.$$

Spojením obou vztahů pak získáme vzorec uvedený v příkladu 3.

[5] Na uvedeném intervalu platí $\sin x\ge\cos x$.

$$S = 2S(f;-a,a) = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-(x/a)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrál, na který zadání příkladu vede, počítáme pomocí substituce:

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-(x/a)^2}\,\mathrm{d}x = b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-(x/a)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = a\cos t \\ \mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -ab\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= -ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = ab\left[\tfrac{1}{2}\left(t-\cos t\sin t\right)\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}ab}}$$

a nakonec píšeme

$$S = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-(x/a)^2}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\pi ab}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADŮM 1 – 4

1. Určete plošný obsah oblasti

a) mezi grafem funkce $f(x) = x^2 + x$ a osou x na intervalu $\langle 1,2\rangle$,

b) mezi grafem funkce $f(x) = \sin x$ a osou x na intervalu $\langle \pi, 3\pi/2\rangle$,

c) mezi grafem funkce $f(x) = x^2 + 3x$ a osou x na intervalu $\langle -1,1\rangle$,

d) ohraničené grafy funkcí $f(x) = x^n$ a $g(x) = \sqrt[n]{x}$, kde n je zadané přirozené číslo. Interval volte podle průsečíků obou grafů.

2. Pomocí integrálního počtu určete plošný obsah

a) kruhu o poloměru r,

b) obdélníka o stranách a a b, [6]

c) pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách a a b a přeponě c, [7]

d) trojúhelníka s vrcholy o souřadnicích A = [0;0], B = $[b;0]$ a C = $[c_1;c_2]$, kde b, $c_1 < b$ a c_2 jsou zadané kladné konstanty (porovnejte se vzorcem známým z elementární geometrie).[8]

PŘÍKLAD 5

Pomocí integrálního počtu určete obvod kružnice o poloměru r.

Řešení

Kružnici o poloměru r a se středem v počátku souřadnic popisujeme v analytické geometrii rovnicí

[6] Využijte faktu, že Obdélník o stranách a a b je totožný s oblastí pod grafem konstantní funkce $f(x) = b$ na intervalu $\langle 0,a\rangle$.

[7] Pravoúhlý trojúhelník umístěte v rovině tak, aby jeho odvěsny ležely na souřadnicových osách x a y.

[8] Trojúhelník z cvičení 2d má jednu stranu délky b a výška na ni spuštěná má délku c_2. Podle vzorce z elementární geometrie by tedy jeho plošný obsah měl být $bc_2/2$.

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

její obvod $O(r)$ je tedy dán jako dvojnásobek délky grafu funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ definované na intervalu $\langle -r, r \rangle$. Můžeme proto psát

$$O(r) = 2L(\sqrt{r^2 - x^2}; -r, r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\sqrt{r^2 - x^2}'\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/r)^2}}\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} y = x/r \\ \mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}y \end{bmatrix} = 2r\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, \mathrm{d}y = 2r\left[\arcsin y\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2r\left[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right] = 2r\left[\pi/2 - (-\pi/2)\right] = \underline{\underline{2\pi r}}.$$

<u>Jiný způsob výpočtu</u> obvodu kružnice vychází z jejího parametrického zadání [9]

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Podle obecného vzorce pro parametricky zadanou křivku (viz Breviář) můžeme tedy v tomto případě psát

$$O(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \left(\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2}\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} r\, \mathrm{d}\varphi = r\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi r}}.$$

<u>CVIČENÍ K PŘÍKLADU 5</u>

1. Určete délky následujících křivek

a) Neilovy paraboly $ay^2 - x^3 = 0$ (a je zadaná kladná konstanta, $y > 0$) na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$,

b) řetězovky $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, a je zadaná kladná konstanta, na intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$, [10]

c) evolventy kružnice o poloměru r, jejíž parametrické rovnice jsou $x = r(\cos t + t\sin t)$, $y = r(\sin t - t\cos t)$, na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$,

d) úsečky spojující dva zadané body v rovině (prostoru).

---

[9] Opět předpokládáme, že střed kružnice je totožný s počátkem souřadnicové soustavy.

[10] Návod: užijte substituce $u = e^{x/a}$.

PŘÍKLAD 6
Pomocí integrálního počtu určete objem koule o poloměru *r*.

Řešení
Koule o poloměru r a se středem v počátku souřadnic vznikne rotací půlkruhu ohraničeného na intervalu $\langle -r, r\rangle$ grafem funkce $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ a osu x kolem této osy. Podle obecného vzorce můžeme tedy pro její objem psát

$$V(r)=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=$$

$$\pi\left[\left(r^3-\tfrac{1}{3}r^3\right)-\left(-r^3-\tfrac{1}{3}(-r^3)\right)\right]=\underline{\underline{\tfrac{4}{3}\pi r^3}}\,.$$

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 6
1. Určete objemy následujících rotačních těles [11]

a) válce o poloměru podstavy r a výšce h,
b) kužele o poloměru podstavy r a výšce h,
c) komolého kužele o poloměrech podstav r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$) a výšce h,
d) rotačního elipsoidu o poloosách a a b,
e) kulové úseče o výšce h odříznutého rovinou z koule o poloměru r,
f) rotačního paraboloidu vzniklého otáčením paraboly $y^2 = 2px$ (p je zadaná kladná konstanta) na intervalu $\langle 0, a\rangle$ kolem osy x.

PŘÍKLAD 7
Pomocí integrálního počtu určete plošný obsah kulové plochy o poloměru *r*.

Řešení
Jak již víme z příkladu 6, kulová plocha o poloměru r a se středem v počátku souřadnic vznikne rotací půlkružnice zadané na intervalu $\langle -r, r\rangle$ grafem funkce $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ kolem osy x. Podle obecného vzorce můžeme tedy pro její plošný obsah psát

$$S(r)=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\sqrt{r^2-x^2}\,'\right)^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\pi r\int_{-r}^{r}1\,\mathrm{d}x=2\pi r\left[x\right]_{-r}^{r}=\underline{\underline{4\pi r^2}}\,.$$

[11] Nejdříve vždy určete, rotací jaké plochy kolem osy x zadané těleso vznikne a grafem které funkce je tato ploch vymezena.

CVIČENÍ K PŘÍKLADU 7

1. Určete povrchy následujících rotačních těles

a) válce o poloměru podstavy r a výšce h,
b) kužele o poloměru podstavy r a výšce h,
c) komolého kužele o poloměrech podstav r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$) a výšce h,
d) kulové úseče o výšce h odříznutého rovinou z koule o poloměru r.

Výsledky:

Cvičení k příkladům 1 – 4

1a) $\dfrac{23}{6}$, 1b) 1, 1c) 3, 1d) $\dfrac{n-1}{n+1}$.

2a) πr^2, 2b) ab, 2c) $\dfrac{1}{2}ab$, 2d) $\dfrac{1}{2}bc_2$.

Cvičení k příkladu 5

1a) $\dfrac{8a}{27}\left[\left(1+\dfrac{9}{4}\dfrac{x_0}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$, 1b) $\dfrac{1}{2}\left[e^{\frac{x_0}{a}}+e^{-\frac{x_0}{a}}\right]$,

1c) $\dfrac{\pi^2 r}{2}$, 1d) $\sqrt{\left(b_2-a_2\right)^2+\left(b_1-a_1\right)^2}$.

Cvičení k příkladu 6

1a) $\pi r^2 h$, 1b) $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, 1c) $\dfrac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$,

1d) $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$, 1e) $\pi rh^2-\dfrac{1}{3}\pi h^3$, 1f) πpa^2.

Cvičení k příkladu 7[12]

1a) $2\pi r^2+2\pi rh$, 1b) $\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$,

1c) $\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi\left(r_1+r_2\right)\sqrt{h^2+\left(r_2-r_1\right)^2}$, 1d) $\pi\left(2rh-h^2\right)+2\pi rh$.

[12] Ve výsledcích jsou kromě povrchu pláště rotačního tělesa započteny i povrchy podstav těchto rotačních těles.