Písemná práce z UVMA2

Část A

A1) Ověřte, že funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ splňuje rovnici $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

A2) Určete úhel α tak, aby derivace funkce $f(x,y)=x^2+y^2$ v bodě $\vec{a}=(1,2)$ a ve směru $\vec{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ byla nulová.

A3) *Pomocí věty o prvním diferenciálu pro funkce dvou proměnných* určete přibližně změnu objemu rotačního elipsoidu o poloosách a = 1 m a b = 0,5 m, jestliže se první i druhá poloosa zvětší o 2 mm ($V=\frac{4}{3}\pi ab^2$).

A4) Vyšetřete definitnost kvadratické formy $F(z_1,z_2,z_3)=z_1{}^2-2z_1z_3+z_2{}^2$.

A5) Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ a určete jejich typ.

Část B

B1) Pomocí Riemannova integrálu určete objem komolého rotačního kužele o poloměrech podstav 5 a 10 a výšce 20 délkových jednotek.

B2) Vypočítejte $\iint\limits_{\mathrm{M}}\sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y\in\langle 0,\ 1\rangle \wedge 0\le x\le y^2\right\}$.

B3) Pomocí substituce do polárních souřadnic vypočítejte $\iint\limits_{\mathrm{M}}\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde

$\mathrm{M}=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\wedge 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$.

B4) Vypočítejte $\iiint\limits_{\mathrm{M}}\sin(x+y)\sin(y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$. (**Návod:** Integrujte v pořadí x, z, y.)

B5) Pomocí substituce do sférických souřadnic vypočítejte $\iiint\limits_{\mathrm{M}}1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\mathrm{M}=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ R_1^2\le x^2+y^2+z^2\le R_2^2\right\}$ a kde R_1 a R_2 jsou kladné konstanty, $R_1<R_2$.
