O S T R A V S K Á  U N I V E R Z I T A

P Ř Í R O D O V Ě D E C K Á  F A K U L T A

# D I F E R E N C I Á L N Í  O P E R Á T O R Y<br>V E K T O R O V É  A N A L Ý Z Y

D A N I E L  H R I V Ň Á K

OSTRAVA 2002

# O B S A H   M O D U L U

# Ú V O D

Tento modul je určen především studentům prvních nebo druhých ročníků přírodovědeckých a učitelských nematematických oborů jako součást základního kurzu aplikované matematiky. Předpokládá znalost středoškolské matematiky a základů diferenciálního počtu jedné reálné proměnné.

Uváděný potřebný čas studia modulu a jednotlivých kapitol je třeba chápat jako čas minimální, potřebný pro pečlivé pročtení a pochopení probírané teorie a hladké vyřešení úloh. Pokud není matematika Vaším koníčkem, asi budete potřebovat čas delší. Předpokládám, že v nejhorším případě se může jednat asi o dvojnásobný čas, jinak pravděpodobně nemáte nutné vstupní vědomosti, uvedené výše.

**Po prostudování modulu budete znát:**

- definici skalárního a vektorového pole;
- definici a vlastnosti operátoru gradient;
- definici a vlastnosti operátoru divergence;
- definici a vlastnosti operátoru rotace;
- definici a vlastnosti Laplaceova oparátoru;
- definici symbolického nabla operátoru;
- vyjádření základních diferenciálních operátorů pomocí nabla operátoru;
- definici hladiny skalárního pole a vektorové čáry vektorového pole;
- klasifikaci vektorových polí na vírová a nevírová, zřídlová a nezřídlová;
- nejdůležitější vzorce platné pro diferenciální operátory.

**Budete schopni:**

- aplikovat operátory gradientu, divergence, rotace a Laplaceův operátor na zadaná skalární nebo vektorová pole;
- klasifikovat vektorová pole.

**Získáte:**

- solidní přehled problematiky diferenciálních operátorů, dostatečný pro většinu praktických aplikací;
- představu o matematicko-fyzikálním významu jednotlivých operátorů;
- potřebnou výpočetní rutinu, která Vám umožní efektivně používat diferenciální operátory ve Vaší specializaci.

**Čas potřebný k prostudování učiva předmětu:**
8 + 14 hodin (teorie + řešení úloh)

**Průvodce studiem.**
Specifikem matematického textu jsou poznámky. Prosím, nechápejte je jako něco podřadného. Naopak, často jsou v poznámkách uvedeny velmi důležité věci, které nedílně doplňují definice, věty a důkazy a které objasňují jejich účel a motivaci.

# 1. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ POLE

**V této kapitole se dozvíte:**

- co je to skalární a vektorové pole;
- co rozumíme hladinou skalárního pole a vektorovou čárou (siločárou) vektorového pole;
- jak lze derivovat vektorové pole podle proměnné (parametru).

**Budete schopni:**

- derivovat vektorové pole podle libovolné proměnné.

**Klíčová slova této kapitoly:**

***skalární pole, vektorové pole, hladina skalárního pole, vektorová čára (siločára) vektorového pole, derivace vektorového pole podle proměnné (parametru).***

**Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:**
0,5 + 1,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

---

**Definice.**
Funkci $u \equiv u(x, y, z)$ tří proměnných – kartézských souřadnic $x, y, z$, definovanou v určité oblasti $\Omega$, nazýváme *skalárním polem*. Plochy $u = konst.$ jsou tzv. *hladiny* tohoto pole.

**Poznámka.**

a) Často je používán kratší zápis $u \equiv u(\vec{r})$ s použitím polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. *polohový vektor*

b) Skalární pole tedy přiřazuje každému bodu oblasti $\Omega$ určitou číselnou hodnotu (skalár).

**Definice.**
Funkci $\vec{a} \equiv \vec{a}(x, y, z)$ tří proměnných – kartézských souřadnic *x*, *y*, *z*, definovanou v určité oblasti $\Omega$, nazýváme *vektorovým polem*.

**Poznámka.**

a) I zde je ovšem možný kratší zápis $\vec{a} \equiv \vec{a}(\vec{r})$ s použitím polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$.

b) Vektorové pole, na rozdíl od pole skalárního, přiřazuje každému bodu oblasti $\Omega$ určitý vektor.

*vektorová čára, siločára*

c) Křivka, pro kterou platí, že tečna k ní v každém jejím bodě má směr vektoru vektorového pole $\vec{a}$ v tomto bodě, se nazývá *vektorovou čárou* nebo také *siločárou* uvedeného vektorového pole.

d) Vektorové pole je možno chápat v širším smyslu jako vektorovou funkci libovolného počtu proměnných. Kromě uvedeného případu se v praxi používá zejména vektorové pole $\vec{a} \equiv \vec{a}(t)$ jedné proměnné *t*, kde proměnná *t* mívá většinou význam času nebo délky oblouku křivky (pak se značí *s*). V praxi často používáme pole jedné proměnné, vzniklé z pole tří proměnných tím, že jednotlivé proměnné $x$, $y$, $z$ jsou funkcí téhož parametru, např. $\vec{A}(s) = \vec{a}\left(x(s), y(s), z(s)\right)$.

e) Pro větší stručnost se běžně hovoří o vektoru $\vec{a}(\vec{r})$, resp. skaláru $u(\vec{r})$. To si ovšem můžeme dovolit pouze tehdy, je-li z kontextu zřejmé, zda se nám jedná o celé pole (tj. funkci), nebo o hodnotu v konkrétním bodě (daném polohovým vektorem $\vec{r}$).

Podobně, jako byly zavedeny derivace (obyčejné i parciální) u skalárních funkcí (polí), můžeme zavést derivace vektorových polí. Provedeme pouze pro vektorové pole jedné proměnné a derivaci prvního řádu, zobecnění na pole více proměnných a vyšší řády derivace je zřejmé.

**Definice.**
Derivací vektoru $\vec{a} \equiv \vec{a}(t)$ podle proměnné (parametru) *t* rozumíme vektor

$$\vec{a}'(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t}\vec{k} = a_1'\vec{i} + a_2'\vec{j} + a_3'\vec{k}\,.$$

**Poznámka.**

a) Derivují se tedy všechny složky vektoru podle téže proměnné.

b) Důležitým speciálním případem je vektorové pole $\vec{r}(s)$, kdy parametrem *s* je délka oblouku křivky, kterou opisuje koncový bod polohového vektoru $\vec{r}$. Pak vektor $\vec{t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$ má jednotkovou délku a nazývá se jednotkový tečný vektor uvedené křivky.

**Věta.**
Pro derivaci součtu, násobku skalárem, skalárního součinu a vektorového součinu vektorových polí platí věty analogické větám pro skalární funkce:

*důležité vzorce*

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)' = \vec{a}' + \vec{b}', \; \left(k \cdot \vec{a}\right)' = k \cdot \vec{a}', \; \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)' = \vec{a}' \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}',$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)' = \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}'.$$

**Důkaz**.
Stačí rozepsat jednotlivá vektorová pole na složky a aplikovat věty o derivaci součtu a součinu funkcí.

**Shrnutí kapitoly.**

Ve vektorové analýze vystupují důležité pojmy skalární a vektorové pole. Skalární pole přiřazuje každému bodu určité, zpravidla trojrozměrné oblasti číslo (skalár). Oproti tomu vektorové pole přiřazuje bodům dané oblasti vektor, tzn. uspořádanou *n*-tici (zpravidla trojici) čísel.

Hladinami skalárního pole rozumíme plochy, na kterých je hodnota tohoto pole stejná. Vektorovými čárami nebo také siločárami vektorového pole jsou myšleny křivky, které v každém bodě mají směr vektoru pole v tomto bodě.

Skalární i vektorové pole můžeme derivovat podle libovolné proměnné (souřadnice) podle běžných algoritmů pro derivování funkcí více proměnných. V případě vektorových polí musíme ovšem provést *n* derivací jednotlivých složek pole.

**Otázky.**

- Definujte skalární a vektorové pole.
- Co rozumíme hladinou skalárního pole a co vektorovou čárou vektorového pole?
- Jak derivujeme vektorové pole podle souřadnice či parametru?

**Příklad.**

Vypočtěte derivaci vektorového pole $\vec{a}(t) = \sqrt{t} \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j} + t^{-1} \cdot \vec{k}$ podle parametru $t$.

**Řešení:**

Derivujeme každou složku zvlášť:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{t}}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}t^{-1}}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{i} + 2t \cdot \vec{j} - \frac{1}{t^2}\vec{k}}}\,.$$

**Úloha 1.1.**

Vypočtěte derivaci vektorového pole $\vec{a}(t)$ podle parametru $t$:

a) $\vec{a}(t) = (t, t^3, \frac{1}{t^2})$;

b) $\vec{a}(t) = e^{-2t}(t, t^3, \frac{1}{t^2})$.

**Úloha 1.2.**
Vypočtěte rychlost a zrychlení bodu, jehož pohyb je popsán vektorovým polem $\vec{r}\left(t\right)$:

a) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t,\ 0)$ - pohyb po kružnici v rovině xy;

b) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t,\ t)$ - pohyb po spirále, navinuté kolem osy z;

c) $\vec{r}(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 0)$ - pohyb po cykloidě v rovině xy;

d) $\vec{r}(t) = \left(\ln \left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + \cos t,\ \sin t,\ 0\right)$ - pohyb po křivce zvané traktrix v rovině xy;

**Návod:** Rychlost je dána první derivací polohového vektoru podle času $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}$, zrychlení druhou derivací polohového vektoru podle času nebo-li první derivací rychlosti podle času $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}$.

**Průvodce studiem.**
*Tak první, zahřívací kapitolu máte za sebou. Doufám, že to pro Vás zatím bylo snadné, ale přijdou těžší věci!*

# 2. GRADIENT

**V této kapitole se dozvíte:**

- jak je definován diferenciální operátor zvaný gradient a jaký je jeho význam;
- čemu říkáme potenciální nebo také konzervativní pole a co jsou to ekvipotenciální plochy;
- jednoduché matematické vzorce výhodné při výpočtech gradientů;
- jak je definován tzv. nabla operátor a jak se dá tento operátor uplatnit při zápisu gradientu.

**Budete schopni:**

- aplikovat gradient na libovolné skalární pole.

**Klíčová slova této kapitoly:**
***gradient, potenciálové pole, konzervativní pole, ekvipotenciální plocha, Hamiltonův operátor nabla.***

**Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:**
0,5 + 2 hodiny (teorie + řešení příkladů)

---

**Definice.**
*Gradientem* skalárního pole $u \equiv u(x, y, z)$ se nazývá vektor (přesněji vektorové pole)

$$\boxed{\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}},$$

*gradient je vektor*

kde vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru os *x, y, z*.

**Poznámka.**
1. Gradient je tedy vektor, jehož složkami jsou parciální derivace skalárního pole podle jednotlivých souřadnic. Je tedy definován pouze v bodech, ve kterých existují všechny tři parciální derivace.
2. Někdy se pro zdůraznění vektorové povahy tohoto operátoru používá označení $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u$.

Připomeneme-li si definici diferenciálu funkce více proměnných $\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$, zjistíme snadno, že platí následující věta.

**Věta.**
Přírůstek d*u* hodnoty skalárního pole při posunutí o malý vektor $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \cdot \vec{i} + \mathrm{d}y \cdot \vec{j} + \mathrm{d}z \cdot \vec{k}$ se vypočte jako skalární součin $\mathrm{d}u = \operatorname{grad}\, u \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

**Poznámka**.

1. Z uvedeného plyne, že *gradient skalárního pole je v každém bodě kolmý k jeho hladině*. Důkaz je jednoduchý: $u = konst.$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}u = 0$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{grad} u \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{grad} u \perp \mathrm{d}\vec{r}$. Totéž se dá říci tak, že siločáry potenciálního pole jsou vždy kolmé k jeho ekvipotenciálám.
2. Z vyjádření skalárního součinu $\operatorname{grad} u \cdot \mathrm{d}\vec{r} = |\operatorname{grad} u| \cdot |\mathrm{d}\vec{r}| \cdot \cos\alpha$ ($\alpha$ je úhel mezi oběma vektory) je zřejmé, že pro konstantní délku $|\mathrm{d}\vec{r}|$ posunutí $\mathrm{d}\vec{r}$ dosáhne přírůstek $\mathrm{d}u$ skalárního pole největší hodnoty tehdy, je-li vektor $\mathrm{d}\vec{r}$ rovnoběžný s gradientem ($\alpha = 0$). Gradient má tedy v každém bodě skalárního pole *směr největšího růstu* tohoto pole.

Gradient představuje vektorové pole, které bylo zkonstruováno „nad“ skalárním polem $u \equiv u(x, y, z)$. Obráceně, existuje-li k vektorovému poli $\vec{a}(\vec{r})$ takové skalární pole $u(\vec{r})$, že $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, pak vektorové pole $\vec{a}(\vec{r})$ nazýváme *potenciálním* (*konzervativním*), skalární pole $u(\vec{r})$ *potenciálem* a hladiny tohoto pole *ekvipotenciálními plochami (ekvipotenciálami)*.

**Věta.**

Pro libovolná skalární pole $u$, $v$, konstantu $k$ a funkci $f(p)$ platí:

*důležité vzorce*

$$\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v, \quad \operatorname{grad}(k \cdot u) = k \cdot \operatorname{grad} u \;\; (k \text{ je konstanta}),$$

$$\operatorname{grad}(u \cdot v) = u \cdot \operatorname{grad} v + v \cdot \operatorname{grad} u, \quad \operatorname{grad} f(u) = f'(u) \cdot \operatorname{grad} u.$$

**Důkaz.**

Je triviální, stačí aplikovat základní věty platné pro derivace skalárních funkcí (viz příklad 2).

**Poznámka.**

V uvedené větě i dále v celém textu používáme spojení „libovolné pole“, „libovolná funkce“ apod. ve významu „libovolné se všemi potřebnými vlastnostmi“, zejména s potřebnými derivacemi.

V praxi se velmi často používá jiného značení gradientu, a to s využitím tzv. *Hamiltonova operátoru nabla* (*nabla operátoru*).
Tento *symbolický* operátor se značí $\nabla$ a zavádí se takto:

$$\boxed{\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}}.$$

Je to vlastně vektor, jehož složkami jsou *symboly* parciálních derivací podle jednotlivých proměnných. Někdy se pro zdůraznění vektorové povahy tohoto operátoru používá označení $\vec{\nabla}$.
Gradient zapíšeme pomocí nabla operátoru takto: $\operatorname{grad} u = \nabla u$. Formálně se tento zápis dá číst jako násobení vektoru $\nabla$ skalárem $u$, zapsané v méně obvyklém pořadí.
Kromě gradientu se pomocí nabla operátoru dají vyjádřit i další diferenciální operátory, jak uvidíme v dalších kapitolách.

**Shrnutí kapitoly:**

Gradient je diferenciální operátor, aplikovatelný na skalární pole. Výsledkem je vektorové pole, jehož složkami jsou parciální derivace skalárního pole podle jednotlivých (kartézských) souřadnic.

Gradient (jako vektor v určitém bodě) je kolmý k hladině skalárního pole procházející daným bodem a udává směr nejrychlejšího růstu hodnot pole v tomto bodě. Snadno lze pomocí něj odhadnout přírůstek hodnoty skalárního pole při dostatečně malém posunutí.

Vektorové pole, které je gradientem nějakého skalárního pole, nazýváme potenciálním nebo také konzervativním polem, uvedené skalární pole potenciálem a jeho hladiny ekvipotenciálními plochami.

Gradient, stejně jako další diferenciální operátory, lze výhodně vyjádřit pomocí symbolického operátoru *nabla*.

**Otázky:**

- Definujte matematicky exaktně operátor gradient.
- Jaký má gradient význam?
- Jak pomocí gradientu odhadneme změnu hodnoty skalárního pole při posunutí o velmi malou vzdálenost?
- Vysvětlete pojmy potenciální pole, potenciál, ekvipotenciální plocha.
- Jak je definován Hamiltonův operátor nabla a jak pomocí něj zapíšeme gradient? Jaká je výhoda uvedeného zápisu?

**Příklad.**

Vypočtěte gradient skalárního pole $u(\vec{r}) = |\vec{r}|$.

**Řešení.** Z definice gradientu plyne nutnost spočítat parciální derivace funkce $u(\vec{r})$ podle jednotlivých souřadnic. Nejprve podle proměnné $x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{|\vec{r}|}$$

Derivace podle proměnných $x$ a $y$ dopadnou obdobně: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{|\vec{r}|}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{|\vec{r}|}$.

Výsledek tudíž je:

$$\operatorname{grad}|\vec{r}| = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \frac{x}{|\vec{r}|}\vec{i} + \frac{y}{|\vec{r}|}\vec{j} + \frac{z}{|\vec{r}|}\vec{k} = \frac{1}{|\vec{r}|}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \underline{\underline{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{r}_0}}\,.$$

**Příklad (složitější).**

Vypočtěte gradient pole $u(\vec{r}) = \dfrac{\vec{b}\cdot(\vec{r}\times\vec{a})}{r}$, kde $\vec{a},\vec{b}$ jsou konstantní vektory.

**Řešení**:

Nejprve si rozepíšeme funkci $u(\vec{r})$ tak, aby bylo zřejmé, jak vlastně vypadá.

Nejprve vektorový součin: $\vec{r}\times\vec{a} = \left(ya_z - za_y\right)\vec{i} + \left(za_x - xa_z\right)\vec{j} + \left(xa_y - ya_x\right)\vec{k}$ .

Nyní zbytek: $u(\vec{r}) = \dfrac{1}{r}\left[b_x\left(ya_z - za_y\right) + b_y\left(za_x - xa_z\right) + b_z\left(xa_y - ya_x\right)\right]$.

Z definice gradientu je zřejmé, že budeme muset spočítat parciální derivace funkce $u(\vec{r})$ podle jednotlivých proměnných *x*, *y*, *z*. Začneme derivací podle *x*. Spočítejme nejprve dvě velmi užitečné derivace:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,2x = \frac{x}{r} \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}.$$

Podle vzorce pro derivaci součinu dostaneme:

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left[b_x\left(ya_z - za_y\right) + b_y\left(za_x - xa_z\right) + b_z\left(xa_y - ya_x\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[b_x\left(ya_z - za_y\right) + b_y\left(za_x - xa_z\right) + b_z\left(xa_y - ya_x\right)\right]$$

Výpočet první derivace na pravé straně jsme již provedli, druhá derivace je triviální, protože $\vec{a},\vec{b}$ jsou konstantní vektory, tj. nezávisí na $x, y, z$. Obdržíme:

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}\cdot\left[b_x\left(ya_z - za_y\right) + b_y\left(za_x - xa_z\right) + b_z\left(xa_y - ya_x\right)\right] + \frac{1}{r}\cdot\left(-b_y a_z + b_z a_y\right).$$

Nyní je čas uvážit, zda výsledek nelze zjednodušit nebo vyjádřit v názornější podobě. Ukazuje se, že máme dvě dobré možnosti:

1. $b_x\left(ya_z - za_y\right) + b_y\left(za_x - xa_z\right) + b_z\left(xa_y - ya_x\right) = b\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$;
2. $\left(-b_y a_z + b_z a_y\right) = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)_x$ (mínus *x*-ová složka vektorového součinu $\vec{b}\times\vec{a}$ ).

Derivaci podle *x* můžeme tedy zapsat v kompaktním tvaru

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}\cdot\vec{b}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) - \frac{1}{r}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)_x.$$

Protože původní výraz je symetrický vůči proměnným *x*, *y*, *z* (tzn. všechny tři proměnné v něm mají stejné postavení) derivace podle zbylých proměnných *y*, *z* dopadnou obdobně, jako derivace podle *x*. Musíme ovšem cyklicky zaměnit proměnné *x*, *y*, *z*, které se ve výrazu explicitně objevily.

$$\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}\cdot\vec{b}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) - \frac{1}{r}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)_y, \quad \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial x} = -\frac{z}{r^3}\cdot\vec{b}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) - \frac{1}{r}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)_z.$$

Zbývá už jen složit gradient (je to vektor!) z výše uvedených složek. Pečlivou prohlídkou získaných výrazů zjistíme, že hledaný gradient lze vyjádřit takto:

$$\operatorname{grad} u(\vec{r}) = \underline{\underline{-\frac{\vec{b}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)}{r^3}\vec{r} - \frac{\vec{b}\times\vec{a}}{r} = -\frac{u(r)}{r^2}\vec{r} - \frac{\vec{b}\times\vec{a}}{r}}}.$$

**Úloha 2.1.**

Vypočtěte gradient skalárního pole $u\left(\vec{r}\right)$:

a) $u(\vec{r})=\dfrac{1}{|\vec{r}|}\equiv\dfrac{1}{r}$;

b) $u(\vec{r})=\dfrac{1}{|\vec{r}|^2}\equiv\dfrac{1}{r^2}$;

c) $u(\vec{r})=\vec{a}\cdot\vec{r}$, kde $\vec{a}$ je konstantní vektor (nezávisí na $\vec{r}$);

d) $u(\vec{r})=x\cdot y\cdot z$;

e) $u(\vec{r})=e^r$;

f) $u(\vec{r})=A\cos(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}+\delta)$, kde $\vec{\kappa}$ je konstantní vektor, $A$ a $\delta$ jsou konstanty;

g) $u(\vec{r})=A\cos(\kappa\quad r+\delta)$, kde $\kappa$, $A$ a $\delta$ jsou konstanty.

H) $u(\vec{r})=\left|\vec{a}\times\vec{r}\right|$, kde $\vec{a}$ je konstantní vektor.

**Úloha 2.2.**

Dokažte, že pro libovolná skalární pole $u$, $v$, konstantu $\kappa$ a funkci jedné proměnné $f$ platí:

a) $\operatorname{grad}\left(u+v\right)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$ (aditivita);

b) $\operatorname{grad}\left(\kappa\cdot u\right)=\kappa\cdot\operatorname{grad}u$ (homogenita);

c) $\operatorname{grad}\left(u\cdot v\right)=u\cdot\operatorname{grad}v+v\cdot\operatorname{grad}u$;

d) $\operatorname{grad}f\left(u\right)=f'\left(u\right)\cdot\operatorname{grad}u$.

**Návod:**

Začněte vždy levou stranou. Pokuste se nalézt v obdržených výsledcích strukturu pravé strany.

**Průvodce studiem.**

*Tak co říkáte na tuto kapitolku? Teorie je celkem snadná, ale výpočty už mohou dát leckomu zabrat. Je možné, že Vám dělá problém výpočet derivací. V tom případě doporučuji zopakovat si teoreticky základní pravidla derivování. Na jejich procvičení budete mít ještě hodně příležitostí v následujících kapitolách.*

# 3. DIVERGENCE

**V této kapitole se dozvíte:**

- jak je definován diferenciální operátor zvaný divergence a jaký je jeho význam;
- co jsou to zřídla a jak je definováno zřídlové a nezřídlové pole;
- jednoduché matematické vzorce užitečné při výpočtu divergence;
- jak se dá divergence zapsat pomocí nabla operátoru.

**Budete schopni:**

- aplikovat divergenci na libovolné vektorové pole.

**Klíčová slova této kapitoly:**

***divergence, zřídlové pole, nezřídlové pole, zřídlo.***

**Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:**
0,5 + 2 hodiny (teorie + řešení příkladů)

---

**Definice.**

*Divergencí* vektoru (vektorového pole) $\vec{a}(x, y, z)$ nazýváme skalár (skalární pole)

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}}.$$

**Poznámka.**

a) Slovně řečeno, jedná se o součet tří parciálních derivací, kde první člen je derivací první složky vektorového pole podle první proměnné, druhý člen derivací druhé složky podle druhé proměnné a třetí člen derivací třetí složky podle třetí proměnné. V každém sčítanci tudíž index složky odpovídá pořadí (indexu) proměnné.

b) Tuto definici lze snadno zobecnit pro případ $n$ proměnných.

c) Na základě *Gaussovy věty* integrálního počtu můžeme pro divergenci psát vyjádření

*divergence a Gaussova věta*

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\!\!\oint_{\Delta S} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}}.$$

Plocha $\Delta S$ je kladně orientovaná uzavřená plocha ohraničující objem $\Delta V$, který obsahuje zvolený bod. Hodnota divergence v určitém bodě představuje tok vektoru $\vec{a}$ z infinitezimálního objemu $\Delta V$ dělený tímto objemem neboli tok vektoru $\vec{a}$ z jednotkového objemu v daném bodě.

d) Jednoduchý fyzikální model. Jestliže vektorové pole $\vec{a}(x, y, z)$ charakterizuje rychlost proudění kapaliny, pak $\operatorname{div}\vec{a}$ v určitém bodě udává objemové množství kapaliny, které vyteče z jednotkového objemu za jednotku času, tzn. vydatnost tohoto jednotkového objemu jakožto *zřídla* kapaliny. Pole, pro které platí identicky (tj. v každém jeho bodě) $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ (např. pole popisující nestlačitelnou kapalinu), se nazývá *nezřídlové pole*. Do libovolného objemu ohraničeného uzavřenou plochou stejné množství kapaliny vtéká i vytéká. Jestliže alespoň v jednom bodě platí $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$, pak pole **a** nazýváme *zřídlovým*. Zřídla se zápornou divergencí se někdy nazývají *nory* nebo také *propady*.

*zřídlové pole*

e) Pomocí nabla operátoru lze zapsat divergenci jako symbolický skalární součin

$$\operatorname{div}\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(a_1, a_2, a_3\right) = \nabla\cdot\vec{a}\,.$$

**Věta.**

Pro libovolná vektorová pole $\vec{a}$, $\vec{b}$ a libovolné skalární pole $u$ platí:

*důležité vzorce*

$$\operatorname{div}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b} \quad (\textit{aditivita divergence}),$$

$$\operatorname{div}\left(u\cdot\vec{a}\right) = u\cdot\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} u\,.$$

**Důkaz.**

Důkaz uvedených vzorců je velmi jednoduchý, stačí rozepsat vektory na složky a použít pravidel pro derivaci součtu a součinu (viz také úlohu A3.2).

**Poznámka.**

a) Protože skalární součin vektorů, součin skaláru a vektoru i součin dvou skalárů se značí stejně, závisí interpretace součinu (např. v právě uvedeném vzorci) na tom, jakého typu jsou jednotliví činitelé. V tom je třeba mít jasno!

b) Z druhého vzorce v poslední větě snadno plyne pro libovolnou konstantu $k$ vztah $\operatorname{div}\left(k\cdot\vec{a}\right) = k\cdot\operatorname{div}\vec{a}$ (*homogenita* divergence).

$\Sigma$

**Shrnutí kapitoly:**

Divergence je diferenciální operátor, aplikovatelný na vektorové pole. Výsledkem je skalární pole, které je součtem parciálních derivací první složky vektorového pole podle první souřadnice, druhé složky vektorového pole podle druhé souřadnice a třetí složky vektorového pole podle třetí souřadnice.

Divergence (její hodnota v určitém bodě) udává tok vektorového pole z jednotkového objemu v tomto bodě. Je-li divergence v nějakém bodě nenulová, nazýváme tento bod zřídlem pole. Někdy se podrobněji rozlišuje zřídlo (divergence kladná) a nora či propad (divergence záporná).

Vektorové pole, které má alespoň jedno zřídlo, nazýváme zřídlovým polem. Jinak se jedná o nezřídlové pole.

Divergenci vektorového pole lze výhodně vyjádřit jako skalární součin symbolického operátoru nabla s tímto polem.

**Otázky:**

- Definujte matematicky exaktně operátor divergence.
- Jaký má divergence význam? Co je to zřídlo, nora, propad?
- Vysvětlete pojmy zřídlové a nezřídlové pole.
- Uveďte dva nejpoužívanější způsoby označení (zápisu) divergence.

**Příklad.**

Aplikujte operátor divergence na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r} = (x, y, z)$ (polohový vektor).

**Řešení.**
Dosadíme do definičního vztahu pro divergenci $\vec{a} = \vec{r}$, tj. $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}};$$

**Příklad (složitější).**

Aplikujte operátor divergence na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \equiv \vec{r}_0$

(jednotkový vektor ve směru polohového vektoru).

**Řešení.**
Opět dosadíme za $\vec{a}$ do definice divergence. Výpočty derivací jsou nyní ovšem složitější.

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\partial x}{\partial x} r^{-1} + x \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = r^{-1} + x(-1) r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x} = r^{-1} - x r^{-2} \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}.$$

Obdobně

$$\frac{\partial a_2}{\partial y} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}$$

a tedy

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \underline{\underline{\frac{2}{r}}} \equiv \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}}.$$

Všimněte si, jak bylo při řešení výhodně používáno označení $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, výpočet se tím velmi zpřehlednil.

**Úloha 3.1.**

Aplikujte operátor divergence na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r})$:

a) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r^3} \equiv \dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$;

b) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r^n} \equiv \dfrac{\vec{r}_0}{r^{n-1}}$;

c) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{v}}{r}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor;

d) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{v} \times \vec{r}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor;

e) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \equiv \dfrac{\vec{v} \times \vec{r}_0}{r^2}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor.

**Úloha 3.2.**

Dokažte, že pro libovolné skalární pole $u$ a vektorové pole $\vec{a}$ platí:

$$\operatorname{div}(u \cdot \vec{a}) = u \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u .$$

**Návod:**

Začněte derivací první složky pole na levé straně rovnice podle proměnné $x$. Obdobně dopadnou i derivace druhé, resp. třetí složky podle $y$, resp. $z$. Pokuste se nalézt v obdržených výsledcích strukturu pravé strany.

**Průvodce studiem.**

*Tato kapitolka Vás asi moc nepřekvapila. Jednoduchá teorie, ale poměrně náročné výpočty derivací. Pokud máte pocit, že jsou příliš obtížné, nezoufejte. S každým vyřešeným příkladem půjde Vaše matematická zručnost rychle nahoru!*

# 4. ROTACE

**V této kapitole se dozvíte:**

- jak je definován diferenciální operátor zvaný rotace a jaký je jeho význam;
- co jsou to víry a jak je definováno vírové a nevírové pole;
- jednoduché matematické věty výhodné pro výpočet rotace;
- jak se dá rotace zapsat pomocí nabla operátoru.

**Budete schopni:**

- aplikovat rotaci na libovolné vektorové pole.

**Klíčová slova této kapitoly:**

***rotace, vírové pole, nevírové pole, vír.***

**Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:**
0,5 + 2,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

**Definice.**
*Rotací* vektorového pole $\vec{a}(x, y, z)$ nazýváme vektorové pole

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\vec{k}}.$$

**Poznámka.**

a) Stačí si zapamatovat pouze tvar první složky, ostatní složky dostaneme cyklickou záměnou indexů a proměnných.

b) Tuto definici není možné zobecnit na případ jiného počtu proměnných než tří.

c) Na základě *Stokesovy věty* integrálního počtu můžeme pro rotaci psát vyjádření

*rotace a Stokesova věta*

$$\operatorname{rot}_{\mathrm{n}} \vec{a} \equiv \|\operatorname{rot} \vec{a}\| \cdot \cos\alpha = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S}.$$

Plocha $\Delta S$ je orientovaná rovinná plocha obsahující zvolený bod a ohraničená kladně orientovanou křivkou $\Delta l$, úhel $\alpha$ je úhel mezi vektorem $\operatorname{rot}\vec{a}$ a normálou k ploše $\Delta S$. Vzorec je třeba chápat tak, že hodnota *kolmé složky* divergence k infinitezimální rovinné plošce $\Delta S$ (jejíž poloha je určena jejím normálovým vektorem) je dána podílem cirkulace vektoru $\vec{a}$ po ohraničující křivce $\Delta l$ a velikosti plochy $\Delta S$. Jinak řečeno, směr a orientace vektoru $\operatorname{rot}\vec{a}$ ve zvoleném bodě odpovídají směru a orientaci normály k *jednotkové* (dostatečně malé) plošce $\Delta S$, jejíž poloha (sklon) maximalizuje cirkulaci vektoru $\vec{a}$ po její hraniční křivce (tj. veličinu $\oint_{\Delta l} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$). Velikost vektoru $\operatorname{rot}\vec{a}$ je dána maximální hodnotou uvedené cirkulace.

*vírové pole*

d) V modelu proudící kapaliny (viz divergence) vektor $\operatorname{rot}\vec{a}$ určuje směr osy, kolem které se kapalina v okolí uvažovaného bodu otáčí, a jeho velikost je rovna dvojnásobku rychlosti otáčení (v obloukové míře). Body, ve kterých je $\operatorname{rot}\vec{a} \neq 0$, označujeme jako *víry*. Pole, pro které platí identicky (tj. v každém jeho bodě) $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, se nazývá *nevírové pole*. Pole, v jehož alespoň jednom bodě je $\operatorname{rot}\vec{a} \neq 0$, nazýváme *vírovým polem*.

e) Pomocí nabla operátoru lze zapsat divergenci jako symbolický vektorový součin $\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (a_1, a_2, a_3) = \nabla \times \vec{a}$.

**Věta.**

Pro libovolná vektorová pole $\vec{a}$, $\vec{b}$ a libovolné skalární pole $u$ platí:

*důležité vzorce*

$$\operatorname{rot}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b} \text{ (aditivita), } \operatorname{rot}\left(u\cdot\vec{a}\right) = u\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\times\operatorname{grad} u,$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}.$$

**Důkaz.**

Důkaz všech uvedených vzorců je jednoduchý, stačí rozepsat argumenty na jednotlivé složky a použít pravidel pro derivaci součtu a součinu (viz úlohu 4.2).

**Poznámka.**

Z druhého vzorce v poslední větě snadno plyne pro libovolnou konstantu $k$ vztah $\operatorname{rot}\left(k\cdot\vec{a}\right) = k\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$ (*homogenita* rotace).

Σ

## Shrnutí kapitoly:

Rotace je diferenciální operátor, aplikovatelný na vektorové pole. Výsledkem je vektorové pole, jehož složkami jsou výrazy obsahující parciální derivace složek výchozího vektorového pole podle souřadnic.

Je-li rotace vektorového pole v nějakém bodě nenulová, nazýváme tento bod vírem pole. Velikost vektoru rotace v tomto bodě pak udává rychlost víření a směr a orientace tohoto vektoru určují směr a orientaci pravotočivé normály k rovině maximálního víru.

Vektorové pole, které má alespoň jeden vír, nazýváme vírovým polem. Jinak se jedná o nevírové pole.

Rotaci vektorového pole lze výhodně vyjádřit jako vektorový součin symbolického operátoru nabla s tímto polem.

?

## Otázky:

- Definujte matematicky exaktně operátor rotace.
- Jaký má rotace význam? Co je to vír?
- Vysvětlete pojmy vírové a nevírové pole.
- Uveďte dva nejpoužívanější způsoby označení (zápisu) rotace.

**Příklad.**

Aplikujte operátor rotace na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r} = (x, y, z)$ (polohový vektor).

**Řešení.**
Dosadíme do definičního vztahu pro rotaci $\vec{a} = \vec{r}$, tj. $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \underline{\underline{\vec{0}}}.$$

**Příklad (složitější).**

Aplikujte operátor divergence na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \equiv \vec{r}_0$

(jednotkový vektor ve směru polohového vektoru).

**Řešení.**
Opět dosadíme za $\vec{a}$ do definice rotace. Nejprve vypočteme první složku:

$$(\operatorname{rot}\vec{a})_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r}\right) = z\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - y\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} = z(-1)r^{-2}\frac{\partial r}{\partial y} - y(-1)r^{-2}\frac{\partial r}{\partial z} =$$

$$= z(-1)r^{-2}\frac{\partial r}{\partial y} - y(-1)r^{-2}\frac{\partial r}{\partial z} = -zr^{-2}\frac{y}{r} + yr^{-2}\frac{z}{r} = -\frac{zy}{r^3} + \frac{yz}{r^3} = 0.$$

Obdobně dopadne výpočet druhé a třetí složky, tudíž $\operatorname{rot}\vec{a} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \underline{\underline{\vec{0}}}$.

**Poznámka.**

Všimněte si, jak bylo při řešení výhodně používáno označení $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, výpočet se tím velmi zpřehlednil.

**Úloha 4.1.**

Aplikujte operátor rotace na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r})$:

a) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r^3} \equiv \dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$;

b) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r^n} \equiv \dfrac{\vec{r}_0}{r^{n-1}}$;

c) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{v}}{r}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor;

d) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{v} \times \vec{r}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor;

e) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \equiv \dfrac{\vec{v} \times \vec{r}_0}{r^2}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor.

**Úloha 4.2.**

Dokažte, že pro libovolné skalární pole $u$ a vektorová pole $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí:

a) $\mathrm{rot}(u \cdot \vec{a}) = u \cdot \mathrm{rot}\, \vec{a} - \vec{a} \times \mathrm{grad}\, u$;

b) $\mathrm{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{a} - \vec{a} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{b}$.

**Návod:**

Začněte na levé straně rovnice podle definice daného operátoru. Pokuste se nalézt v obdržených výsledcích strukturu pravé strany.

**Průvodce studiem.**

*Ani charakter této kapitoly se nijak nevymyká předchozím kapitolám, dokonce jsou výpočty ještě trochu obtížnější, protože operátor rotace je asi nejsložitější. Ale asi je Vám již jasné, že se v podstatě jedná o jedno a to samé – o umění derivovat.*

# 5. LAPLACEŮV OPERÁTOR

**V této kapitole se dozvíte:**

- jak je definován diferenciální Laplaceův operátor a jaký je jeho význam;
- jak aplikovat Laplaceův operátor na skalární a vektorové pole;
- jednoduché matematické vzorce pro práci s Laplaceovým operátorem;
- jak se dá Laplaceův operátor vyjádřit pomocí nabla operátoru.

**Budete schopni:**

- aplikovat Laplaceův operátor na libovolné skalární nebo vektorové pole.

**Klíčová slova této kapitoly:**

***Laplaceův operátor.***

**Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:**
0,5 + 2,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

**Definice.**
Laplaceovým operátorem rozumíme symbolický operátor

$$\boxed{\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}.$$

Aplikace na skalární pole: $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Aplikace na vektorové pole: $\Delta \vec{a} \equiv \vec{i}\,\Delta a_1 + \vec{j}\,\Delta a_2 + \vec{k}\,\Delta a_3$.

**Poznámka.**

a) Definici je možné zobecnit na případ $n$ proměnných.
b) Jedná se o jediný operátor, který lze aplikovat na skalární i vektorové pole. Výsledné pole je téhož typu jako pole výchozí.
c) Výraz $\Delta u$ se místo dlouhého „Laplaceův operátor aplikovaný na pole $u$“ obvykle zkracuje na „Laplace $u$“ apod. Čtení „delta $u$“ je zde zcela nepřípustné, neboť je vyhrazeno pro přírůstek veličiny $u$. Stejné grafické označení v praxi nevadí, neboť z kontextu je vždy jasné, který případ nastává.
d) Laplaceův operátor nemá tak názorný význam jako např. divergence nebo rotace, ale uplatňuje se značně v přírodních vědách, např. v elektřině a magnetismu, v nauce o vlnění, v rovnicích pro difúzi atd.

e) Laplaceův operátor lze také vyjádřit pomocí nabla operátoru, a to jako formální skalární součin nabla operátoru sama se sebou $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, tzn. jako druhá mocnina operátoru nabla. Z důvodu ortonormality báze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ totiž platí

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left( \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Věta.**
Pro libovolná skalární pole $u$, $v$, vektorová pole $\vec{a}$, $\vec{b}$ a konstantu $k$ platí:

*důležité vzorce*

$$\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v \text{ (aditivita)}, \; \Delta(u \cdot v) = v\Delta u + u\Delta v + 2 \cdot \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v,$$

$$\Delta\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \Delta\vec{a} + \Delta\vec{b} \text{ (aditivita)}, \; \Delta(k\vec{a}) = k\Delta\vec{a} \text{ (homogenita)}.$$

**Důkaz**
Důkaz uvedených vzorců je opět velmi jednoduchý (viz též úlohu A5.3).

**Poznámka.**
Z druhého vzorce v poslední větě snadno plyne pro libovolnou konstantu $k$ vztah $\Delta(k \cdot u) = k\Delta u$ (*homogenita* Laplaceova operátoru při aplikaci na skalární pole).

**Shrnutí kapitoly:**

Laplaceův operátor je diferenciální operátor, aplikovatelný na skalární i vektorové pole. Výsledkem je pole téhož typu.

Při aplikaci Laplaceova operátoru na skalární pole vzniká skalární pole, které je součtem druhých parciálních derivací pole podle jednotlivých souřadnic. Aplikace na vektorové pole spočívá v trojnásobné „skalární“ aplikaci na všechny tři složky pole.

Ačkoliv Laplaceův operátor nemá tak názorný význam jako gradient, divergence či rotace, hraje důležitou roli v mnoha partiích matematiky, fyziky a dalších přírodních věd.

Laplaceův operátor lze vyjádřit a zapsat jako druhou mocninu nabla operátoru.

**Otázky:**

- Definujte matematicky exaktně Laplaceův operátor.
- Na jaké typy polí lze Laplaceův operátor aplikovat a jakého typu je výsledek?
- jaké jsou dva nejpoužívanější způsoby označení (zápisu) Laplaceova operátoru?

**Příklad.**

Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\equiv r$ (velikost polohového vektoru).

**Řešení.**
Aplikace Laplaceova operátoru na skalární pole $u$ je definována takto:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Vypočteme nejprve parciální derivace pole $u$ podle $x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}.$$

Derivace podle $y$ a $z$ dopadnou z důvodu symetrie derivovaného výrazu podle všech proměnných obdobně:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}.$$

Nyní stačí sečíst nalezené parciální derivace druhého řádu:

$$\Delta u=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\underline{\underline{\frac{2}{r}}}.$$

**Příklad.**

Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole $\vec{a}(\vec{r})=\vec{r}=(x,y,z)$ (polohový vektor).

**Řešení.**
Dosadíme do definičního vztahu pro Laplaceův operátor $\vec{a}=\vec{r}$, tj. $a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$:

$$\Delta\vec{a}=\vec{i}\,\Delta a_1+\vec{j}\,\Delta a_2+\vec{k}\,\Delta a_3=\vec{i}\,\Delta x+\vec{j}\,\Delta y+\vec{k}\,\Delta z=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\vec{i}\,\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}+\vec{j}\,\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\vec{k}\,\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=\vec{i}\,\frac{\partial 1}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial 1}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial 1}{\partial z}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\underline{\underline{\vec{0}}}.$$

**Úloha 5.1.**

Aplikujte Laplaceův operátor na skalární pole $u(x,y,z)$.

a) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\equiv\dfrac{1}{r}$;

b) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\equiv\dfrac{1}{r^2}$;

c) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{r^n}$.

**Úloha 5.2.**

Aplikujte Laplaceův operátor na vektorové pole $\vec{a}\left(\vec{r}\right)$.

a) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r^3} \equiv \dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$;

b) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{r^n} \equiv \dfrac{\vec{r}_0}{r^{n-1}}$;

c) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{v}}{r}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor;

d) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{v} \times \vec{r}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor;

e) $\vec{a}(\vec{r}) = \dfrac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \equiv \dfrac{\vec{v} \times \vec{r}_0}{r^2}$, kde $\vec{v}$ je konstantní vektor.

**Úloha 5.3.**

Dokažte, že pro libovolná skalární pole $u$, $v$ platí vzorec

$$\Delta\left(u \cdot v\right) = v\Delta u + u\Delta v + 2 \cdot \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\,.$$

**Návod:**

Začněte na levé straně rovnice podle definice daného operátoru. Pokuste se nalézt v obdržených výsledcích strukturu pravé strany.

**Průvodce studiem.**

*Asi to opět pro Vás nebylo výpočetně jednoduché, protože Laplaceův operátor obsahuje druhé derivace, ale mám pro Vás příjemnou zprávu: Laplaceovým operátorem končíme. V poslední kapitole tohoto modulu Vás čeká už jen přehled vlastností všech čtyř probraných diferenciálních operátorů.*

# 6. VLASTNOSTI DIFERENCIÁLNÍCH OPERÁTORŮ

**V této kapitole se dozvíte:**

- co rozumíme linearitou diferenciálních operátorů;
- jak se dají diferenciální operátory přehledně zapsat pomocí symbolického nabla operátoru;
- o čem hovoří tzv. operátorové identity aneb jak dopadne postupná aplikace (skládání) dvou různých diferenciálních operátorů;
- jak se dají explicitně popsat nevírová a nezřídlová pole.

**Klíčová slova této kapitoly:**

***linearita operátorů, nabla operátor, operátorové identity, skládání diferenciálních operátorů, nevírová a nezřídlová pole.***

**Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:**
0,5 + 0,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

---

**Věta.**
Všechny probrané diferenciální operátory, tedy gradient, divergence, rotace a Laplaceův operátor jsou *lineární*, tzn. *homogenní* (pro $k$-násobný argument obdržíme $k$-násobek hodnoty pro argument) a *aditivní* (pro součet argumentů obdržíme součet hodnot pro jednotlivé argumenty).

*linearita operátorů*

**Důkaz.**
Byl uveden v kapitolách týkajících se jednotlivých operátorů. Obecně se dá říci, že linearita diferenciálních operátorů plyne z linearity derivace.

**Vyjádření pomocí nabla operátoru.**
Všechny probrané diferenciální operátory lze vyjádřit pomocí symbolického operátoru nabla a operací vektorové algebry. Přehledně to ukazuje následující tabulka. Blíže viz předchozí kapitoly věnované jednotlivým operátorům.

| | | |
|---|---|---|
| gradient | $\mathrm{grad}\, u = \nabla \cdot u$ | součin vektoru $\nabla$ a skaláru $u$ |
| divergence | $\mathrm{div}\, \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$ | skalární součin vektoru $\nabla$ a vektoru $\vec{a}$ |
| rotace | $\mathrm{rot}\, \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$ | vektorový součin vektoru $\nabla$ a vektoru $\vec{a}$ |
| Laplaceův operátor | $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ | skalární součin vektoru $\nabla$ se sebou samým |

**Úkol.**
Rozepište naznačené operace s nabla operátorem a ověřte, že uvedené vzorce platí.

Jak dopadnou postupné aplikace nebo-li skládání různých operátorů, ukazují následující vzorce, zvané ***operátorové identity***.

**Věta.**
Pro libovolné skalární pole $u$ a vektorové pole $\vec{a}$ platí:

*operátorové identity*

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u\,,\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} + \Delta\vec{a}\,,$$
$$\Delta\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}\Delta u\,,\ \Delta\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\Delta\vec{a}\,,$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}\,,\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0\,.$$

**Důkaz.**
Přenechávám čtenáři jako cvičení (viz též úlohu 6.1).

**Poznámka.**
a) První dvě identity se zabývají skládáním divergence a gradientu. Výsledek je vždy netriviální a lze jej vyjádřit pomocí ostatních operátorů.
b) Další dvě identity konstatují fakt, že při skládání Laplaceova operátoru a gradientu , resp. rotace nezáleží na pořadí. Uvedené dvojice operátorů *komutují*.
c) Poslední dvě identity vyjadřují důležitý poznatek, že pole $\operatorname{grad} u$ (potenciální pole) je vždy nevírové (jeho rotace je identicky rovna nule) a pole $\operatorname{rot}\vec{a}$ je nutně nezřídlové (jeho divergence je identicky nulová). Toto tvrzení platí za určitých, značně obecných podmínek (uvažovaná oblast $\Omega$ musí být jednoduše souvislá) také obráceně, tzn. je-li nějaké vektorové pole v určité oblasti $\Omega$ nevírové ($\operatorname{rot}\vec{a} = 0$), musí být gradientem nějakého skalárního pole ($\vec{a} = \operatorname{grad} u$), a je-li pole v $\Omega$ nezřídlové ($\operatorname{div}\vec{b} = 0$), musí být rotací nějakého vektorového pole ($\vec{b} = \operatorname{rot}\vec{a}$).
d) Uvedené identity můžeme názorně zdůvodnit vyjádřením operátorů pomocí nabla operátoru a použitím jednoduchých pravidel pro skalární a vektorový součin. Např. v předposlední identitě výraz $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$ nabývá tvaru $\nabla\times(\nabla u)$, který můžeme přepsat na $(\nabla\times\nabla)u$ (veličina $u$ zde hraje roli skaláru). Protože vektorový součin dvou vektorů téhož směru je roven nulovému vektoru, je $\nabla\times\nabla = \vec{0}$, a tedy $(\nabla\times\nabla)u = \vec{0}u = \vec{0}$. Obdobně v poslední identitě výraz $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$ přepíšeme na $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})$. Vektorový součin $\vec{b} \equiv \nabla\times\vec{a}$ je, jak známo, kolmý k oběma činitelům, tedy také k symbolickému vektoru $\nabla$. To ovšem znamená, že skalární součin $\nabla\cdot\vec{b} = 0$, neboť skalární součin dvou navzájem kolmých vektorů je z definice nulový.

**Úkol.**
Zkuste operátorové identity formulovat zpaměti. Nepokračujte dále, dokud se Vám to nepodaří!

**Shrnutí kapitoly:**

Všechny probrané operátory (gradient, divergence, rotace, Laplaceův operátor) jsou lineární, tzn. homogenní a aditivní.

Každý z uvedených operátorů lze zapsat pomocí symbolického nabla operátoru a operací vektorové algebry.

Výsledek postupné aplikace nebo-li skládání dvou různých diferenciálních operátorů vyjadřují vzorce zvané operátorové identity. Z těchto identit plynou některé důležité závěry, např. to, že nevírové pole se dá vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole (potenciálu) a nezřídlové pole lze vyjádřit jako rotaci určitého vektorového pole.

**Otázky:**

- Co rozumíme linearitou operátoru? Které diferenciální operátory jsou lineární?
- Jak zapíšeme gradient, divergenci, rotaci a Laplaceův operátor pomocí nabla operátoru?
- Co vyjadřují jednotlivé operátorové identity? Formulujte slovně.
- Jak se dají explicitně vyjádřit nevírová a nezřídlová pole? Odkud tato vyjádření plynou?

**Úloha 6.1.**

Dokažte, že pro libovolné skalární pole $u$ platí vzorec

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u\,.$$

**Návod:**

Začněte na levé straně rovnice podle definice daného operátoru. Pokuste se nalézt v obdržených výsledcích strukturu pravé strany.

**Průvodce studiem.**

*Právě jste ukončil(a) tento modul, k čemuž Vám srdečně gratuluji. Pokud jste opravdu poctivě propočítal(a) většinu úloh, ovládáte problematiku diferenciálních operátorů na úrovni, která bohatě stačí pro řešení většiny praktických problémů.*

*Nyní již pouze vyřešte korespondenční úkoly a zašlete je tutorovi kurzu, v rámci kterého tento modul studujete. Hodně zdaru!*

**Korespondenční úkol.**

Zvolte si libovolné, ne příliš jednoduché skalární a vektorové pole tří kartézských souřadnic $x$, $y$, $z$ a aplikujte na ně všechny probrané diferenciální operátory, které je možné aplikovat na daný typ pole.

# ŘEŠENÍ ÚLOH

**1. Skalární a vektorové pole.**

**1.1a)** $\vec{a}'(t) = (1,\ 3t^2,\ -2t^{-3})$;

**1.1b)** $\vec{a}'(t) = e^{-2t}(1-2t,\ 3t^2-2t^3,\ -2t^{-2}-2t^{-3})$.

**1.2a)** $\vec{v} = (-\sin t,\ \cos t, 0)$, $\vec{a} = -\vec{r}$;

**1.2b)** $\vec{v} = (-\sin t,\ \cos t,\ 1)$; $\vec{a} = -(\cos t, \sin t,\ 0)$;

**1.2c)** $\vec{v} = (1-\cos t,\ \sin t,\ 0)$, $\vec{a} = (\sin t,\ \cos t,\ 0)$

**1.2d)** $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t,\ \cos t,\ 0\right)$, $\vec{a} = \left(-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t,\ -\sin t,\ 0\right)$.

**2. Gradient.**

**2.1a)** $\operatorname{grad} u = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$; **2.1b)** $\operatorname{grad} u = -2\dfrac{\vec{r}}{r^4}$; **2.1c)** $\operatorname{grad} u = \vec{a}$;

**2.1d)** $\operatorname{grad} u = (yz,\ xz,\ xy)$; **2.1e)** $\operatorname{grad} u = e^r\dfrac{\vec{r}}{r} \equiv e^r\vec{r}_0$;

**2.1f)** $\operatorname{grad} u = -A\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}+\delta)\vec{\kappa}$; **2.1g)** $\operatorname{grad} u = -A\kappa\sin(\kappa r+\delta)\cdot\vec{r}_0$;

**2.1h)** $\operatorname{grad} u = \dfrac{(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}}{|\vec{a}\times\vec{r}|}$.

**2.2a)** Stačí použít aditivity derivace (derivace součtu se rovná součtu derivací):

$$\operatorname{grad}(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(u+v)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(u+v)}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{k} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} + \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v.$$

**2.2b)** Použijeme homogenity derivace (z derivace můžeme vytknout multiplikativní konstantu):

$$\operatorname{grad}(\kappa\cdot u) = \frac{\partial(\kappa\cdot u)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\kappa\cdot u)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\kappa\cdot u)}{\partial z}\vec{k} = \kappa\frac{\partial(u)}{\partial x}\vec{i} +$$

$$+\kappa\frac{\partial(u)}{\partial y}\vec{j} + \kappa\frac{\partial(u)}{\partial z}\vec{k} = \kappa\left(\frac{\partial(u)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(u)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(u)}{\partial z}\vec{k}\right) = \kappa\cdot\operatorname{grad} u.$$

**2.2c)** Aplikujeme větu o derivaci součinu:

$$\operatorname{grad}\,(u.v) = \frac{\partial(u.v)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(u.v)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(u.v)}{\partial z}\vec{k} = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{k} = u\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + u\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + u\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k} +$$

$$+v\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + v\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + v\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = u\ \operatorname{grad} v + v\ \operatorname{grad} u.$$

**2.2d)** Využijeme větu o derivaci složené funkce:

$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(u)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(u)}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= f'(u).\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = f'(u)\ \operatorname{grad} u.$$

## 3. Divergence.

**3.1a)** $\operatorname{div}\vec{a} = 0$; **3.1b)** 1b) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{3-n}{r^n}$; **3.1c)** 1c) $\operatorname{div}\vec{a} = -\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r^3}$;

**3.1d)** 1d) $\operatorname{div}\vec{a} = 0$; **3.1e)** 1e) $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

**3.2)** Vyjdeme z definice operátoru divergence. Při výpočtu je nutno použít věty o derivaci součinu.

$$\operatorname{div}(u\cdot\vec{a}) = \frac{\partial(u.a_1)}{\partial x} + \frac{\partial(u.a_2)}{\partial y} + \frac{\partial(u.a_3)}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}a_1 + u\frac{\partial a_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}a_2 + u\frac{\partial a_2}{\partial y}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}a_3 + u\frac{\partial a_3}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}a_1 + u\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}a_2 + u\frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}a_3 + u\frac{\partial a_3}{\partial z} =$$

$$= \left(u\frac{\partial a_1}{\partial x} + u\frac{\partial a_2}{\partial y} + u\frac{\partial a_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}a_1 + \frac{\partial u}{\partial y}a_2 + \frac{\partial u}{\partial z}a_3\right) = u\cdot\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} u.$$

## 4. Rotace.

**4.1a)** $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$; **4.1b)** $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$; **4.1c)** $\operatorname{rot}\vec{a} = \dfrac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$; **4.1d)** $\operatorname{rot}\vec{a} = 2\vec{v}$;

**4.1e)** $\operatorname{rot}\vec{a} = -\dfrac{\vec{v}}{r^3} + 3\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r}$.

**4.2a)** Podle definice rotace platí:

$$\operatorname{rot}(u.\vec{a})=\left(\frac{\partial(u.a_3)}{\partial y}-\frac{\partial(u.a_2)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(u.a_1)}{\partial z}-\frac{\partial(u.a_3)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(u.a_2)}{\partial x}-\frac{\partial(u.a_1)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}a_3+u\frac{\partial\, a_3}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}a_2-u\frac{\partial\, a_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}a_1+u\frac{\partial\, a_1}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}a_3-u\frac{\partial\, a_3}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}a_2+u\frac{\partial\, a_2}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}a_1-u\frac{\partial\, a_1}{\partial y}\right)\vec{k}=u\left(\frac{\partial\, a_3}{\partial y}-\frac{\partial\, a_2}{\partial z}\right)\vec{i}+u\left(\frac{\partial\, a_1}{\partial z}-\frac{\partial\, a_3}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+u\left(\frac{\partial\, a_2}{\partial x}-\frac{\partial\, a_1}{\partial y}\right)\vec{k}-\left(a_2\frac{\partial u}{\partial z}-a_3\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{i}-\left(a_3\frac{\partial u}{\partial x}-a_1\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{j}-\left(a_1\frac{\partial u}{\partial y}-a_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{k}=$$

$$=u\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\times\operatorname{grad}u\ .$$

**4.2b)** Protože $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$, můžeme rozepsat:

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{\partial}{\partial x}(a_2b_3-a_3b_2)+\frac{\partial}{\partial y}(a_3b_1-a_1b_3)+\frac{\partial}{\partial z}(a_1b_2-a_2b_1)=$$

$$=\frac{\partial a_2}{\partial x}b_3+a_2\frac{\partial b_3}{\partial x}-\frac{\partial a_3}{\partial x}b_2-a_3\frac{\partial b_2}{\partial x}+\frac{\partial a_3}{\partial y}b_1+a_3\frac{\partial b_1}{\partial y}-\frac{\partial a_1}{\partial y}b_3-a_1\frac{\partial b_3}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial a_1}{\partial z}b_2+a_1\frac{\partial b_2}{\partial z}-\frac{\partial a_2}{\partial z}b_1-a_2\frac{\partial b_1}{\partial z}=b_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)+b_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x}\right)+$$

$$+b_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y}\right)-a_1\left(\frac{\partial b_3}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)-a_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial z}-\frac{\partial b_3}{\partial x}\right)-a_3\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)=$$

$$=\vec{b}\ \operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\ \operatorname{rot}\vec{b}.$$

## 5. Laplaceův operátor.

**5.1a)** $\Delta u=0$; **5.1b)** $\Delta u=\dfrac{2}{r^4}$; **5.1c)** $\Delta u=\dfrac{n(n-1)}{r^{n+2}}$.

**5.2a)** $\Delta\vec{a}=\vec{0}$; **5.2b)** $\Delta\vec{a}=\dfrac{n(n-3)}{r^{n+2}}\vec{r}$; **5.2c)** $\Delta\vec{a}=\vec{0}$; **5.2d)** $\Delta\vec{a}=\vec{0}$;

**5.2e)** $\Delta\vec{a}=12\dfrac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^5}$.

**5.3)** Vyjdeme jako obvykle z definice operátoru na levé straně dokazované rovnice.

$$\Delta(u.v)=\frac{\partial^2(u.v)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u.v)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(u.v)}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial y}u\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}v+\frac{\partial v}{\partial z}u\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}u+$$

$$+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}v+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}u+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}=v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+$$

$$+u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)=v\Delta u+u\Delta v+2\ \mathrm{grad}\ u\cdot\mathrm{grad}\ v.$$

## 6. Vlastnosti diferenciálních operátorů.

**6.1)** Vyjdeme z levé strany rovnice a definic jednotlivých operátorů:

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ u=\mathrm{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\equiv\Delta u.$$

## L I T E R A T U R A

1. KALUS, R., HRIVŇÁK, D. *Breviář vyšší matematiky*. 1. vyd. Ostrava: Ostravská univerzita, 2001. 132 s. ISBN 80-7042-819-8.
2. REKTORYS, K. a spol. *Přehled užité matematiky*. 6. přepr. vyd. Praha: Prometheus, 1995.

# P O Z N Á M K Y