O S T R A V S K Á   U N I V E R Z I T A

P Ř Í R O D O V Ě D E C K Á   F A K U L T A

O B Y Č E J N É   D I F E R E N C I Á L N Í   R O V N I C E

A   J E J I C H   S O U S T A V Y

D A N I E L   H R I V Ň Á K

OSTRAVA 2002

O B S A H   M O D U L U

Ú V O D

Tento modul je určen především studentům prvních nebo druhých ročníků přírodovědeckých a učitelských nematematických oborů jako součást základního kurzu aplikované matematiky. Předpokládá znalost středoškolské matematiky, základů diferenciálního počtu jedné i více reálných proměnných a integrálního počtu jedné reálné proměnné.

Uváděný potřebný čas studia modulu a jednotlivých kapitol je třeba chápat jako čas minimální, potřebný pro pečlivé pročtení (s porozuměním) probírané teorie a hladké vyřešení úloh. Pokud není matematika Vaším koníčkem, asi budete potřebovat čas delší. Předpokládám, že v nejhorším případě se může jednat asi o dvojnásobný čas, jinak pravděpodobně nemáte nutné vstupní vědomosti, uvedené výše.

Po prostudování modulu budete znát:

- definici skalárního a vektorového pole;
- definici a vlastnosti operátoru gradient;
- definici a vlastnosti operátoru divergence;
- definici a vlastnosti operátoru rotace;
- definici a vlastnosti Laplaceova oparátoru;
- definici symbolického nabla operátoru;
- vyjádření základních diferenciálních operátorů pomocí nabla operátoru;
- definici hladiny skalárního pole a vektorové čáry vektorového pole;
- klasifikaci vektorových polí na vírová a nevírová, zřídlová a nezřídlová;
- nejdůležitější vzorce platné pro diferenciální operátory.

Budete schopni:

- aplikovat operátory gradientu, divergence, rotace a Laplaceův operátor na zadaná skalární nebo vektorová pole;
- klasifikovat vektorová pole.

Získáte:

- solidní přehled problematiky diferenciálních operátorů, dostatečný pro většinu praktických aplikací;
- představu o matematicko-fyzikálním významu jednotlivých operátorů;
- potřebnou výpočetní rutinu, která Vám umožní efektivně používat diferenciální operátory ve Vaší specializaci.

Čas potřebný k prostudování učiva modulu:
8 + 14 hodin (teorie + řešení úloh)

Průvodce studiem.
Specifikem matematického textu jsou poznámky. Prosím, nechápejte je jako něco podřadného. Naopak, často jsou v poznámkách uvedeny velmi důležité věci, které nedílně doplňují definice, věty a důkazy a které objasňují jejich účel a motivaci.

A. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

A1. ZÁKLADNÍ POJMY

V této kapitole se dozvíte:

- co rozumíme pojmem obyčejná diferenciální rovnice a jejím řádem;
- jak je definováno řešení nebo-li integrál diferenciální rovnice a jaké typy řešení rozlišujeme;
- co jsou to tzv. počáteční podmínky pro řešení diferenciální rovnice.

Budete schopni:

- ověřit, zda určitá funkce je v daném oboru řešením dané diferenciální rovnice.

Klíčová slova této kapitoly:

obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu, partikulární řešení, partikulární integrál, obecné řešení, obecný integrál, počáteční podmínky, singulární řešení, singulární integrál.

Čas potřebný k prostudování učiva předmětu:
0,5 + 0,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.

Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu pro neznámou funkci $y(x)$ nezávislé proměnné x rozumíme rovnici

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0},$$

nebo, je-li takzvaně *rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci*, rovnici tvaru

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}.$$

Definice.
Řešením nebo také *integrálem* (přesněji *partikulárním* řešením či integrálem) diferenciální rovnice $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ nazýváme každou funkci $y = g(x)$, která v uvažovaném oboru vyhovuje identicky této rovnici.

Poznámka.

1. Uvažovaným oborem je nejčastěji nějaký interval *I*, speciálně např. okolí nějakého bodu nebo celá množina *R* reálných čísel.
2. Formulace „vyhovuje identicky“ znamená, že po dosazení řešení do diferenciální rovnice dostaneme identitu, nebo-li vztah, který je splněn pro všechna *x* z uvažovaného oboru.
3. Řešení může být dáno také jako *implicitní funkce*, tzn. rovnicí $h(x,y)=0$, ze které můžeme pro určité x vypočítat příslušnou hodnotu $y(x)$.

Obecně vzato nemusí mít určitá diferenciální rovnice v uvažovaném oboru žádné řešení, několik řešení nebo i nekonečně mnoho řešení. V praxi je nejdůležitější vědět, zda řešení vůbec existuje a zda (příp. za jakých podmínek) je jednoznačné. O tom hovoří následující věta.

Věta.

Nechť je dána diferenciální rovnice ve tvaru $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ a bod $P\left[a,b_{1,},b_{2,}...,b_n\right]$. Nechť funkce f, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y},\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y'},...,\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y^{(n-1)}}$ jsou spojité (jako funkce *n*+1 proměnných) v okolí bodu *P*. Pak v určitém okolí bodu *a* existuje právě jedno řešení $y=g(x)$, které splňuje tzv. *počáteční podmínky* $g(a)=b_1$, $g'(a)=b_2$, ..., $g^{(n-1)}(a)=b_n$.

Poznámka.

a) Věta má lokální charakter (pojednává o řešení v okolí bodu *a*). Silnější větu, která by zaručovala existenci a jednoznačnost řešení v celém uvažovaném intervalu *I*, je možné formulovat např. pro tzv. lineární diferenciální rovnice (budou uvedeny dále). Obecně však, nalezneme-li řešení určité diferenciální rovnice s danými počátečními podmínkami v nějakém okolí bodu *a*, musíme vyšetřit, zda je možné toto řešení rozšířit i mimo toto okolí a zda je toto rozšíření jednoznačné.

b) Obecnější tvar rovnice $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ použít nelze, protože ani za velmi „rozumných“ podmínek pro funkci *F* nelze zaručit jednoznačnost řešení.

Nalezené partikulární řešení (v okolí daného bodu *a*) je dáno volbou počátečních podmínek, tzn. *n*-tice hodnot $\left[b_{1,},b_{2,}...,b_n\right]$. Ukazuje se, že je možné definovat typ řešení, ve kterém explicitně vystupuje n nezávislých parametrů (konstant).

Definice.

Nechť Ω je (*n*+1)-rozměrná oblast, složená z takových bodů $P\left[a,b_{1,},b_{2,}...,b_n\right]$, pro které má rovnice $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ právě jedno řešení. *Obecným řešením* (*obecným integrálem*) *vzhledem k oblasti* Ω pak rozumíme funkci $g(x,C_1,C_2,...,C_n)$ proměnné *x* a konstant $C_1,C_2,...,C_n$ takovou, že pro každý bod $P\in\Omega$ lze těmto konstantám přiřadit (a to jednoznačně!) takové číselné hodnoty, že vzniklá funkce proměnné x $y(x)=g(x,C_1,C_2,...,C_n)$ je řešením dané diferenciální rovnice s počátečními podmínkami určenými bodem *P*.

Poznámka.

1. Řečeno trochu jinak, obecné řešení v sobě obsahuje všechna partikulární řešení, odpovídající různým počátečním podmínkám. Tato partikulární řešení obdržíme vhodnou volbou konstant.
2. Žádná z konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$ v obecném řešení nemůže být zbytečná, tzn. nelze ji vypustit ani spojit s jinou konstantou. Počet konstant musí být roven řádu rovnice n.

V praxi se poměrně často objevuje případ, kdy kromě obecného řešení diferenciální rovnice (vzhledem k nějaké oblasti Ω) existuje i řešení, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant, které nicméně splňuje danou diferenciální rovnici pro určité počáteční podmínky. Toto řešení řadíme mezi tzv. *singulární řešení*.

Definice.

Singulárním řešením (*singulárním integrálem*) rovnice $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ nazýváme takové řešení této rovnice, v jehož každém bodě je porušena jednoznačnost, tzn. každým bodem $[x, y]$ tohoto řešení prochází ještě jiné řešení.

Poznámka.

a) Singulárním řešením je nejčastěji obálka parametrického systému křivek, tvořeného obecným řešením.

b) Předchozí věta o jednoznačnosti řešení ovšem není narušena, pouze v bodech, kterými singulární řešení prochází, nejsou splněny předpoklady její platnosti.

Pojmy *obecné řešení* a *singulární řešení* rozšiřujeme i na diferenciální rovnice obecnějšího tvaru $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Definice jsou trochu komplikovanější, ale pro naše účely to není podstatné.

Úloha A1.1.

Je dána diferenciální rovnice $y = xy' - y'^2$.

a) Ověřte, že funkce $y = Cx - C^2$ je jejím obecným řešením.

b) Nalezněte partikulární řešení, vyhovující podmínce $y(1) = -2$.

c) Je funkce $y = \dfrac{x^2}{4}$ singulárním řešením dané rovnice?

d) Načrtněte několik partikulárních řešení do grafu!

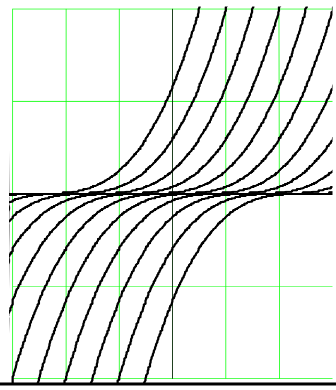
Příklad:

Ilustrace základních pojmů z teorie diferenciálních rovnic na rovnici $y' = \sqrt[3]{y^2}$.

- Rovnice $y' = \sqrt[3]{y^2}$ je *diferenciální rovnicí prvního řádu*, protože nejvyšší přítomná derivace je první derivace.
- Rovnice je tzv. *rozřešena vzhledem k první (nejvyšší) derivaci*.
- *Partikulárním řešením*, a to v celém oboru reálných čísel, je např. funkce $y = \frac{1}{27}x^3$,protože po dosazení do výchozí rovnice dostaneme identitu, platnou v R :

  $$L = y' = \frac{3}{27}x^2 = \frac{1}{9}x^2, \qquad P = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{3^3}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{x}{3}\right)^6} = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{9},$$

  $L \equiv P$.
- *Obecným řešením* v oblasti $\Omega = R \times R = R^2$ je systém funkcí $y = \frac{1}{27}(x - C)^3$, kde konstanta $C \in R$. Libovolné partikulární řešení, vyhovující počáteční podmínce $y(a) = b$, kde $[a, b] \in \Omega$, dostaneme jednoznačnou volbou $C = a - 3\sqrt[3]{b}$.
- *Existence a jednoznačnost řešení* je zaručena všude, kde funkce $f(x, y)$ a funkce $\frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}y}$ jsou spojité jako funkce dvou proměnných x, y . V našem případě je $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$, což je funkce spojitá v celém R^2, a $\frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\sqrt[3]{y^2}\right) = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, což je funkce spojitá v celém R^2 kromě přímky $y = 0$ (osy x). Odtud plyne, že na přímce $y = 0$ nemusí platit (a neplatí!) jednoznačnost řešení.
- *Singulárním řešením* je nulová funkce $y(x) = 0$, neboť tato funkce identicky splňuje v R výchozí rovnici, ale nelze ji získat z obecného řešení žádnou volbou konstanty C. Každým bodem $[a,\ y(a)] \equiv [a,\ 0]$ tohoto řešení prochází (právě jedno) další řešení $y = \frac{1}{27}(x - a)^3$. Situace je znázorněna na obrázku. Je vidět, že singulární řešení vzniká jako obálka systému křivek obecného řešení.



Shrnutí kapitoly:

Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které vystupuje neznámá funkce jedné nezávislé proměnné, její derivace různého řádu a výrazy s nezávislou proměnnou. Řád n nejvyšší derivace přítomné v rovnici je také řádem diferenciální rovnice.

Diferenciální rovnice, ve kterých je nejvyšší derivace explicitně vyjádřena , nazýváme rozřešené vzhledem k nejvyšší (n-té) derivaci.

Řešením či integrálem, přesněji partikulárním řešením či integrálem diferenciální rovnice je libovolná funkce, která tuto rovnici v určité oblasti identicky splňuje. Partikulární řešení splňuje kromě vlastní diferenciální rovnice tzv. počáteční podmínky. Počáteční podmínky předepisují hodnotu hledané funkce a všech jejích derivací kromě nejvyšší (n-té) v určitém bodě uvažované oblasti.

Pokud jsou splněny podmínky jednoznačnosti řešení dané diferenciální rovnice, lze nalézt tzv. obecné řešení, které obsahuje n parametrů (konstant) a ze kterého se všechna partikulární řešení dají získat určitou volbou těchto konstant.

Pokud podmínky jednoznačnosti řešení splněny nejsou, může se vyskytnout tzv. singulární řešení, které splňuje diferenciální rovnici i určitou počáteční podmínku, ale nelze je získat z obecného řešení žádnou volbou konstant. Singulární řešení je zpravidla obálkou parametrického systému křivek, daného obecným řešením.

Otázky:

- Definujte exaktně obyčejnou diferenciální rovnici v nejobecnějším tvaru a ve tvaru rozřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci.
- Vysvětlete pojem řešení (integrál) diferenciální rovnice.
- Co jsou to počáteční podmínky?
- Definujte exaktně obecné, partikulární a singulární řešení (integrál).

Průvodce studiem.

První kapitola je za Vámi! Neměla by Vám dělat velké problémy, jedná se o definice základních pojmů, které je třeba bezpečně znát.

A2. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

V této kapitole se dozvíte:

- jak je definována diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými (nebo-li separovatelná) a jakou metodou se řeší.

Budete schopni:

- řešit diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými.

Klíčová slova této kapitoly:

diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými (separovatelná), separace proměnných.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:

0,25 + 1,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.

Rovnicí se separovanými proměnnými (také *separovatelnou diferenciální rovnicí*) nazýváme rovnici tvaru

$$\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}.$$

Věta (metoda řešení).

Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce $g(y)$ spojitá a různá od nuly v intervalu $\langle c,d\rangle$, pak uvedená rovnice má v oblasti $\Omega = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ obecný integrál $\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Partikulární integrál, procházející bodem $[x_0, y_0] \in \Omega$, je dán rovnicí $\int_{y_0}^{y} g(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Poznámka.

a) Řešíme tedy *separací proměnných* (odtud název typu rovnice), kdy na jednu stranu rovnice převedeme členy s proměnnou y a na druhou stranu členy s proměnnou x tak, abychom mohli obě strany integrovat podle příslušné proměnné.

b) Tento typ diferenciální rovnice v sobě zahrnuje dva jednodušší typy: $y' = f(x)$ s řešením $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a typ $y' = f(y)$ s řešením (implicitním) $x = \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)}$.

Příklad.
Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými $yy' + x = 0$. Nalezněte také partikulární řešení, vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 2$.

Řešení.
Rozepíšeme derivaci jako podíl diferenciálů $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a rovnici upravíme na tvar, kdy na jedné její straně bude výraz pouze s proměnnou y a na druhé straně výraz pouze s proměnnou x (tj. provedeme separaci proměnných). Obdržíme $y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$. Integrací obou stran $\int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x$ dostaneme rovnici $\dfrac{1}{2}y^2 + C_1 = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_2$. Jednoduchou úpravou a sloučením obou integračních konstant v jednu získáme *obecné řešení* $x^2 + y^2 = C$.

Řešení ponecháme v uvedeném, tzv. implicitním tvaru, neboť explicitní vyjádření ve tvaru $y = f(x)$ není jednoznačné a je komplikovanější.

Hledejme nyní partikulární integrál, splňující počáteční podmínku $y(0) = 2$.Dosazením této podmínky do obecného řešení obdržíme pro konstantu C rovnici $0^2 + 2^2 = C$, odkud $C = 4$. Příslušný partikulární integrál má tedy tvar $x^2 + y^2 = 4$.

Shrnutí kapitoly:
Základní diferenciální rovnicí prvního řádu je rovnice se separovatelnými proměnnými nebo-li separovatelná.

Metoda jejího řešení spočívá v tzv. separaci proměnných, kdy rozepíšeme derivaci jako podíl diferenciálů a pak matematickými úpravami převedeme na jednu stranu rovnice členy s proměnnou x a na druhou stranu rovnice členy s proměnnou tak, aby bylo možné levou i pravou stranu rovnice přímo integrovat podle příslušné proměnné.

Po integraci obdržíme obecné řešení většinou v implicitním tvaru, které, je-li to možné, převedeme na explicitní tvar (tzn. vyjádříme y jako funkci x).

Otázky:
- Definujte separovatelnou diferenciální rovnici.
- Jak tuto rovnici řešíme?
- Čemu říkáme separace proměnných?

Úloha A2.1.

Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými:

a) $xy' - y = 0$, $y(-2) = 4$;

b) $xy' + y = 0$, $y(-1) = 1$;

c) $y' = y$, $y(0) = 2$;

d) $x^2 y' + y = 0$, $y(1) = e^2$;

e) $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$;

f) $x^2 y' + y^2 = 0$, $y(-1) = 1$;

g) $(x^2 + x)y' = 2y + 1$;

h) $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$.

Průvodce studiem.

Nyní již umíte řešit svou první diferenciální rovnici! Věřím, že Vás to povzbudí do dalšího studia.

Rovnice se separovanými proměnnými nebo-li separovatelná je základním typem diferenciální rovnice. Její řešení je velmi jednoduché.

Problémy ale můžete mít s výpočtem vznikajících integrálů. Protože v tomto kurzu nejde o to, procvičit metody výpočtu integrálů, doporučuji v praxi obvyklý postup: složitější integrály nepočítat, ale nalézt si je v tabulkách integrálů.

A3. HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

V této kapitole se dozvíte:

- jak je definována homogenní diferenciální rovnice prvního řádu a jakou metodou se řeší.

Budete schopni:

- rozpoznat a vyřešit homogenní diferenciální rovnici prvního řádu.

Klíčová slova této kapitoly:
homogenní diferenciální rovnice prvního řádu.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,25 + 1,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Homogenní diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Předpokládá se $x \neq 0$ ve vyšetřovaném oboru.

Metoda řešení.

Řešíme zavedením nové funkce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$, nebo-li $x \cdot z(x) = y(x)$. Derivováním poslední rovnice podle x dostaneme vztah $y' = z + x \cdot z'$. Dosadíme-li za y a y' do původní rovnice, dostaneme diferenciální rovnici $z + x \cdot z' = f(z)$, kterou jednoduše upravíme na rovnici se separovanými proměnnými $z' = \frac{f(z) - z}{x}$. Najdeme-li její řešení $z(x)$, je řešením původní rovnice funkce $\underline{\underline{y(x) = x \cdot z(x)}}$.

Poznámka.

a) Termín *homogenní* v názvu rovnice znamená, že na pravé straně se jedná o tzv. homogenní funkci (nultého stupně). Připomeňme, že funkce $f(x, y)$ se nazývá homogenní s-tého stupně, platí-li $f(tx, ty) = t^s f(x, y)$. Nezaměňovat s termínem homogenní rovnice ve smyslu rovnice bez pravé strany!

b) Na homogenní rovnici lze převést rovnici $y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$ tak, že se vhodnou substitucí $x = u + A$, $y = v + B$ zbavíme absolutních členů c_1, c_2.

Příklad.

Řešte homogenní diferenciální rovnici $x^2y' = y^2 - xy$.

Řešení.

Zadanou rovnici vydělením x^2 převedeme na tvar $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$, čímž jednak ověříme, že se opravdu jedná o rovnici homogenní, tj. obecného tvaru $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, jednak si připravíme dosazení substituce $z = \frac{y}{x}$ (nebo-li $y = xz$). Po dosazení dostaneme $z + xz' = z^2 - z$, což je rovnice se separovanými proměnnými, kterou již umíme řešit. Řešení vede na integrální rovnici $\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, jejíž integrací obdržíme rovnici $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z-2}{z}\right) + C_1 = \ln x + C_2$. Odlogaritmováním a zavedením nové konstanty C získáme rovnici $\frac{z-2}{z} = Cx^2$. Po zpětném dosazení $z = \frac{y}{x}$ a elementárních úpravách obdržíme *obecné řešení* $\underline{\underline{y = \frac{2x}{1 - Cx^2}}}$.

Shrnutí kapitoly:

Rovnice homogenní má na pravé straně homogenní funkci nultého řádu v proměnných x, y. Řešíme ji substitucí $z = \frac{y}{x}$, kterou tato rovnice přejde na rovnici separovatelnou.

Otázky:

- Definujte homogenní diferenciální rovnici prvního řádu.
- Jak tuto rovnici řešíme?
- Odkud se vzal název homogenní rovnice? Znáte další význam termínu homogenní rovnice?

Úloha A3.1.

Řešte homogenní diferenciální rovnici. Najděte obecné řešení a také příslušné partikulární řešení, je-li uvedena počáteční podmínka.

a) $yy' = 2y - x$; b) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$, $y(-1) = 0$;

c) $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$; d) $x^2y' = y^2 + xy$, $y(1) = -1$;

e) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$; f) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$, $y(1) = 1$.

A4. LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

V této kapitole se dozvíte:

- jak je definována lineární diferenciální rovnice prvního řádu a jakou metodou se řeší.

Budete schopni:

- rozpoznat a vyřešit lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

Klíčová slova této kapitoly:

lineární diferenciální rovnice prvního řádu homogenní a nehomogenní, metoda variace konstanty.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,5 + 2,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici tvaru

$$\boxed{y' + a(x)\,y = b(x)}.$$

Věta.
Jsou-li funkce $a(x)$, $b(x)$ spojité v určitém intervalu, existuje v tomto intervalu právě jedno řešení.

Metoda řešení.
Nejprve řešíme rovnici bez pravé strany, tzv. *homogenní* rovnici (nezaměňovat s názvem předchozí diferenciální rovnice) $y' + a(x)\,y = 0$. Tato rovnice se řeší snadno separací proměnných:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln(Ky) = -\int a(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow Ky = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \Rightarrow y = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x}, C = \frac{1}{K}.$$

variace konstanty

Obecný integrál původní nehomogenní rovnice (s pravou stranou) dostaneme tzv. *metodou variace konstanty*. Předpokládáme, že řešení nehomogenní rovnice má stejný tvar jako řešení homogenní rovnice, avšak integrační konstantu považujeme za funkci proměnné *x*: $y = C(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$. Tento výraz derivujeme podle x a dosadíme do původní rovnice:

$$C'(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)C(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x).$$

Dostali jsme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro funkci $C(x)$, jejímž řešením je $C(x)=\int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. Dosazením do předpokládaného řešení nehomogenní rovnice obdržíme nakonec obecný integrál ve tvaru $\underline{\underline{y=e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}}$.

Poznámka.

a) Jedná se o vzácný případ, kdy se dá řešení vyjádřit analytickým vzorcem. V praxi ale většinou nedosazujeme do výsledného vzorce, ale provádíme uvedený postup krok po kroku.

b) Dá se ukázat, že výsledné řešení má tvar součtu obecného řešení rovnice bez pravé strany a nějakého (jakéhokoliv) partikulárního řešení rovnice s pravou stranou, což platí i pro lineární rovnice vyššího řádu.

Příklad.

Řešte lineární diferenciální rovnici $y'-\dfrac{3y}{x}=x$. Nalezněte také partikulární řešení, vyhovující podmínce $y(1)=0$.

Řešení.

Zadaná rovnice má tvar $y'+a(x)y=b(x)$, je to tedy lineární diferenciální rovnice. Funkce $b(x)$ tvoří tzv. pravou stranu. Nejprve řešíme rovnici bez pravé strany (zvanou homogenní), tj. rovnici $y'-\dfrac{3y}{x}=0$. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Již známým postupem dostaneme integrální rovnici $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=3\int\frac{dx}{x}$, odkud integrací $\ln y+C_1=3\ln x+C_2$. Po odlogaritmování a zavedení nové konstanty C obdržíme *obecné řešení homogenní rovnice* $y=Cx^3$.
Dalším krokem je tzv. *metoda variace konstanty*. Hledáme obecné řešení původní nehomogenní rovnice ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice $y=C(x)x^3$, kdy však konstantu C pokládáme za (zatím neznámou) funkci proměnné x. Dosazením předpokládaného tvaru řešení do původní rovnice obdržíme pro neznámou funkci $C(x)$ rovnici prvního řádu $C'x^3+3Cx^2-\dfrac{3Cx^3}{x}=x$, odkud $C'=\dfrac{1}{x^2}$, a dále $C=\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+K$. Získanou funkci dosadíme do obecného řešení homogenní rovnice a vrátíme se k označení integrační konstanty C, čímž dostaneme *obecné řešení* původní nehomogenní rovnice $\underline{\underline{y=Cx^3-x^2}}$.

Hledejme nyní partikulární řešení, splňující počáteční podmínku $y(1)=0$. Dosazením do nalezeného obecného řešení nehomogenní rovnice dostaneme rovnici $0=C\cdot 1^3-1^2$, odkud $C=1$. Partikulární řešení má proto tvar $\underline{\underline{y=x^3-x^2}}$.

Shrnutí kapitoly:

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu je důležitým speciálním případem obecné lineární rovnice vyššího řádu, který je probírán dále v textu. Na levé straně této rovnice je lineární výraz v proměnných y' a y, na pravé straně libovolná funkce nezávisle proměnné x. Je-li tato funkce nulová, hovoříme o homogenní lineární rovnici, v opačném případě o nehomogenní lineární rovnic.

Lineární diferenciální rovnici řešíme ve dvou krocích. Nejprve nalezneme obecné řešení příslušné homogenní rovnice (tj. původní rovnice bez pravé strany), což lze vždy provést separací proměnných. Toto řešení obsahuje právě jednu volitelnou konstantu. Druhým krokem je tzv. metoda variace konstanty, kdy předpokládáme, že také řešení nehomogenní rovnice má stejný tvar jako řešení rovnice homogenní, ale původní konstanta v homogenním řešení je nyní neznámou funkcí proměnné x. Tuto funkci určíme dosazením předpokládaného tvaru řešení do nehomogenní rovnice.

Otázky:

- Definujte lineární diferenciální rovnici prvního řádu.
- Jaká je metoda řešení této rovnice?
- K čemu slouží metoda variace konstanty?

Úloha A4.1.

Řešte lineární diferenciální rovnici. Najděte obecné řešení a také příslušné partikulární řešení, je-li uvedena počáteční podmínka.

a) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$; b) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$, $y(\pi) = 0$;

c) $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = -\frac{1}{2}$; d) $(2x+1)y' + y = x$, $y(0) = -\frac{1}{3}$;

e) $y' - y \cdot tgx = x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$; f) $y' + y\cos x = \sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Průvodce studiem.

Asi se mnou budete souhlasit, že řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu již není triviální záležitostí. Kromě pochopení teoretického postupu řešení, který musíte umět samozřejmě zpaměti, je třeba zvládnout i konkrétní výpočetní problémy každého příkladu (úpravy rovnic, logaritmování a odlogaritmování, řešení integrálů atd.). Pokud se Vám to moc nedaří, nevěšte hlavu. Musíte překonat počáteční potíže zvýšeným úsilím, ale stojí to za to. Brzy zjistíte, že Vaše matematická zručnost se zvyšuje a že probíraná látka vlastně vůbec není těžká.

A5. EXAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

V této kapitole se dozvíte:

- jak je definována exaktní diferenciální rovnice a jakou metodou se řeší.

Budete schopni:

- rozpoznat a vyřešit exaktní diferenciální rovnici.

Klíčová slova této kapitoly:

exaktní diferenciální rovnice, totální diferenciál, kmenová funkce, integrační faktor.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,5 + 2,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.

Mějme rovnici $y' + \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = 0$, kde funkce $f(x,y)$, $g(x,y)$ mají v určité oblasti Ω spojité derivace prvního řádu. Rovnici můžeme převést na diferenciální formu

$$\boxed{f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}.$$

Pokud je levá strana poslední rovnice v Ω *totálním diferenciálem* nějaké funkce $F(x,y)$, jedná se o tzv. *exaktní* rovnici. Funkci $F(x,y)$ nazýváme *kmenovou funkcí*.

kmenová funkce

Metoda řešení.

Výraz $f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y$ je, jak víme, totálním diferenciálem právě tehdy, platí-li v Ω rovnost $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$. Po ověření platnosti této rovnice nalezneme kmenovou funkci $F(x,y)$ a obecný integrál původní rovnice (v implicitním tvaru) je pak dán rovnicí $\underline{\underline{F(x,y) = C}}$.

Nalezení kmenové funkce $F(x,y)$ plyne z rovnic $f(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ a $g(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, odkud $F(x,y) = \int f(x,y)\,\mathrm{d}x + C(y)$ a zároveň $F(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}y + C(x)$ (viz příklad).

Věta (integrační faktor).
Pokud rovnice není exaktní, můžeme se pokusit najít takovou funkci $m(x,y)$, zvanou *integrační faktor,* aby rovnice $m(x,y)\,f(x,y)\,\mathrm{d}x + m(x,y)\,g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ byla exaktní.
Najít takovou funkci není obecně snadné, protože musíme řešit parciální diferenciální rovnici $\dfrac{\partial(mf)}{\partial y} = \dfrac{\partial(mg)}{\partial x}$. Dá se však snadno ukázat, že pokud je výraz $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g}$, resp. $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{f}$ funkcí pouze proměnné *x*, resp. *y*, je také integrující faktor funkcí pouze *x*, resp. *y* a nalezneme jej řešením rovnice $\dfrac{d\ln m}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g}$, resp. $\dfrac{d\ln m}{dy} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{-f}$.

Příklad 1.
Řešte exaktní diferenciální rovnici $\left(3x^2 + 2y\right)\mathrm{d}x + \left(2x - 3\right)\mathrm{d}y = 0$.

Řešení.
Zaveďme standardní označení $f(x,y) = 3x^2 + 2y$, $g(x,y) = 2x - 3$.
Nejprve zjistíme, zda platí rovnost $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$. Protože $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$ a $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2$, rovnost platí a jedná se opravdu o exaktní rovnici. Levá strana zadané rovnice je tedy totálním diferenciálem $\mathrm{d}F(x,y)$ kmenové funkce $F(x,y)$ (kterou musíme nalézt) a obecné řešení má tvar $F(x,y) = C$.
Pro funkci F platí, že $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f$, odkud dostaneme

$$F(x,y) = \int f\,dx + C(y) = \int\left(3x^2 + 2y\right)dx + C(y) = x^3 + 2yx + C(y).$$

Integrační konstanta $C(y)$ je obecně funkcí y, při parciálním derivování podle x vymizí stejně jako obyčejná konstanta. K jejímu určení využijeme toho, že pro funkci F dále platí $\dfrac{\partial F}{\partial y} = g$, odkud obdržíme postupně $2x + C'(y) = 2x - 3$, $C'(y) = -3$, $C(y) = \int(-3)\,\mathrm{d}y = -3y$. Integrační konstantu zde není třeba psát. Dosazením získané funkce $C(y)$ do F dostaneme hledanou funkci $F(x,y) = x^3 + 2yx - 3y$.
Obecné řešení výchozí rovnice tudíž je $F(x,y) = x^3 + 2yx - 3y = C$, v explicitním tvaru $\underline{\underline{y = \dfrac{C - x^3}{2x - 3}}}$.

Příklad 2.

Nalezněte integrační faktor a řešte diferenciální rovnici $\left(x^2 - y\right)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$.

Řešení.

Zavedeme standardní označení $f(x, y) = x^2 - y$, $g(x, y) = x$.

Vypočteme $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$ a $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 1$. Protože se oba výsledky liší, nejedná se o exaktní rovnici. Zkusíme nalézt integrační faktor, tj. takovou funkci $m(x, y)$, aby rovnice

$$m(x, y)\, f(x, y)\mathrm{d}x + m(x, y)\, g(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

byla exaktní.

Protože výraz $\Phi \equiv \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g} = \dfrac{-2}{x}$ je funkcí pouze proměnné x, lze, jak víme z teorie, integrační faktor hledat jako funkci proměnné x, vyhovující rovnici $\dfrac{\mathrm{d}\ln m}{\mathrm{d}x} = \Phi$. Integrací dostáváme $\ln m = -\int \dfrac{2}{x}\mathrm{d}x = -2\ln x$, odkud $\underline{\underline{m(x) = \dfrac{1}{x^2}}}$.

Integrační konstantu při této integraci neuvádíme (volíme rovnu nule), protože nám stačí jakýkoliv partikulární integrál. Vynásobením výchozí rovnice nalezeným integračním faktorem m dostaneme již exaktní rovnici $\left(1 - \dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \dfrac{1}{x}\mathrm{d}y = 0$.

Tuto rovnici vyřešíme již známým postupem, proto jen stručně:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = g \Rightarrow F = \int g dy + C(x) = \int \frac{1}{x} dy + C(x) = \frac{y}{x} + C(x);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x} + C(x)\right) = 1 - \frac{y}{x^2} \Rightarrow -\frac{y}{x^2} + C'(x) = 1 - \frac{y}{x^2} \Rightarrow$$

$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = \int 1 dx = x$ a tedy $F(x, y) = \dfrac{y}{x} + x$.

Obecné řešení exaktní rovnice a také rovnice původní tudíž je $F(x, y) = \dfrac{y}{x} + x = C$, nebo-li $\underline{\underline{y = Cx - x^2}}$.

Shrnutí kapitoly:

Exaktní rovnice vyjadřuje podmínku nulovosti totálního diferenciálu nějaké funkce $F(x, y)$, zvané kmenová funkce. Tato podmínka se dá snadno ověřit. Řešení spočívá v nalezení kmenové funkce na základě vztahů, plynoucích z vlastností totálního diferenciálu a položením této kmenové funkce rovnou konstantě.

Pokud rovnice není exaktní, může se stát, že po vynásobení vhodnou funkcí zvanou integrační faktor se rovnice exaktní stane. Najít integrační faktor je ale obecně dosti obtížná úloha.

Otázky:

- Definujte exaktní diferenciální rovnici.
- Jaká je metoda řešení této rovnice?
- Jakou roli hraje tzv. kmenová funkce?
- K čemu slouží integrační faktor?

Úloha A5.1.

Řešte exaktní diferenciální rovnici.

a) $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}y=0$;

b) $3x^2e^y\mathrm{d}x+(x^3e^y-1)\mathrm{d}y=0$;

c) $e^{-y}\mathrm{d}x+\left(1-xe^{-y}\right)\mathrm{d}y=0$;

d) $2x\cos^2 y\mathrm{d}x+\left(2y-x^2\sin 2y\right)\mathrm{d}y=0$;

e) $2x\cdot\mathrm{tg}\, y\mathrm{d}x+\left(x^2-2\sin y\right)\mathrm{d}y=0$;

f) $\left(x^2-3y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$.

Návod.

U rovnic e) a f) je třeba nalézt integrační faktor $m(x,y)$.

Průvodce studiem.

Ani rovnice exaktní nepatří k nejjednodušším. Základem je přesné pochopení teoretické metody řešení, pak je vše daleko snazší. Každopádně řešte sám (sama) většinu příkladů na konci každé kapitoly. Je to opravdu jediná možnost, jak se naučit matematiku používat v praxi!

A6. ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU NEROZŘEŠENÉ VZHLEDEM K DERIVACI

V této kapitole se dozvíte:

- jak se řeší vybrané typy rovnic prvního řádu nerozřešených vzhledem k derivaci.

Budete schopni:

- vyřešit vybrané typy rovnic prvního řádu nerozřešených vzhledem k derivaci.

Klíčová slova této kapitoly:

diferenciální rovnice prvního řádu nerozřešená vzhledem k derivaci, Clairautova rovnice.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,25 + 1,25 hodiny (teorie + řešení úloh)

Víme již, že za rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci považujeme takové rovnice, které nelze ekvivalentně převést na tvar $y' = f(x, y)$. Obecně se tyto rovnice dají řešit tzv. metodou dvou parametrů. My probereme vybrané jednodušší speciální případy.

Rovnice vyřešená vzhledem k neznámé funkci y.
Jedná se o rovnici tvaru

$$\boxed{y = f(x, y')}.$$

Metoda řešení.
Rovnici přepíšeme na tvar $y = f(x, p)$, kde jsme zavedli tzv. *parametr* $p \equiv y'$. Derivací podle x a opětným dosazením parametru p za y' obdržíme rovnici $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, po úpravě $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{p - \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, p)}{\partial p}}$. Toto je rovnice prvního řádu pro neznámou funkci $p(x)$, rozřešená vzhledem k derivaci. Nalezneme-li její obecný integrál (např. některou z dříve probraných metod) $p = g(x, C)$, pak přímým dosazením do původní rovnice obdržíme její obecné řešení $\underline{\underline{y = f(x, g(x, C))}}$.

Poznámka.
Lze také nejprve derivovat výchozí rovnici podle x, čímž dostaneme rovnici druhého řádu $y' = \frac{\partial f(x, y')}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y')}{\partial y'} y''$, ve které „chybí“ y, a teprve do této rovnice dosadit p za y', čímž dosáhneme snížení jejího řádu (viz také *snížení řádu* v kapitole „Vybrané rovnice vyšších řádů“).

Poznámka.
Zajímavý moment nastává v okamžiku, kdy již máme řešení $p=g(x,C)$. Místo dosazení do původní rovnice se nabízí také možnost vrátit se k y' a řešit úlohu $y'=g(x,C)$. Tím bychom však dostali řešení rovnice druhého řádu, uvedené v předchozí poznámce (s dvěma integračními konstantami), což není naším úkolem.

Rovnice Clairautova.
Speciálním případem uvažované rovnice je rovnice

$$\boxed{y=xy'+\varphi(y')},$$

zvaná *Clairautova* (čteme „klerotova“). Uvedeným postupem snadno zjistíme, že její obecné řešení má tvar $y=Cx+\varphi(C)$ a navíc objevíme, že existuje i singulární řešení, vyhovující rovnici $x+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y'}=0$.

Rovnice vyřešená vůči nezávisle proměnné x.
Rovnici typu

$$\boxed{x=f(y,y')}$$

můžeme snadno převést na předchozí typ. Záměnou označení proměnných $x \leftrightarrow y$ a následnou úpravou $y=f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=f\left(x,\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right)=f\left(x,\frac{1}{y'}\right)$ obdržíme rovnici již známého typu $y=g(x,y')$, kterou vyřešíme už známým postupem a ve výsledném řešení opět zaměníme $x \leftrightarrow y$ (v podstatě řešíme diferenciální rovnici pro inverzní funkci).

Poznámka.
Probrané typy rovnic zahrnují také speciální případy $\boxed{y=f(y')}$ a $\boxed{x=f(y')}$.

Příklad.

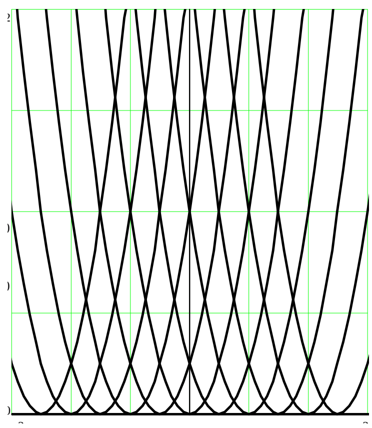
Řešte diferenciální rovnici $4y = y'^2$.

Řešení.

Jedná se o rovnici spadající pod typ $y = f(x, y')$. Derivací obou stran této rovnice podle proměnné x obdržíme rovnici druhého řádu $4y' = 2y'y''$, ve které není explicitně přítomna proměnná y. Zavedením parametru $p = y'$ dostaneme rovnici prvního řádu $4p = 2pp'$ pro funkci $p(x)$. Tato rovnice může být splněna dvěma způsoby. Buď je $p = 0$ nebo (po vydělení obou stran rovnice parametrem p) musí platit $4 = 2p'$.

První možnost dává po dosazení $y' = p = 0$ do původní rovnice *singulární řešení* $\underline{\underline{y = 0}}$.

Druhá možnost vede na jednoduchou diferenciální rovnici $p' = 2$, odkud integrací $p = \int 2dx = 2x + C$. Dosazením $y' = p = 2x + C$ do původní rovnice dostaneme *obecné řešení* $4y = (2x + C)^2$, které upravíme na explicitní tvar $y = \left(x + \frac{C}{2}\right)^2$ a zavedením nové konstanty C místo $\frac{C}{2}$ obdržíme optimální vyjádření $\underline{\underline{y = (x + C)^2}}$.



Jedná se zřejmě o soustavu parabol, které se otevírají nahoru a dotýkají se osy x (viz obrázek). Osa x představuje singulární řešení, které je obálkou soustavy parabol.

Shrnutí kapitoly:

Metody řešení rovnic prvního řádu nerozřešených vzhledem k derivaci jsou obecně náročnější a přesahují rámec tohoto modulu.

Podrobněji je probrána rovnice rozřešená vůči neznámé funkci $y = f(x, y')$. Tuto rovnici je možné zavedením parametru $p = y'$ a derivací celé rovnice podle proměnné x převést na rovnici rozřešenou vzhledem k derivaci. Její obecné řešení p dosadíme do výchozí rovnice za y' a obdržíme obecné řešení původní rovnice. Typickou rovnicí tohoto typu je rovnice Clairautova.

Na předchozí typ rovnice lze snadno převést i rovnici rozřešenou vůči nezávisle proměnné $x = f(y, y')$.

Otázky:

- Čím se vyznačují rovnice prvního řádu nerozřešené vzhledem k derivaci?
- Kterou rovnici tohoto druhu umíte řešit a jakým postupem?
- Jak vypadá Clairautova rovnice a jak se řeší?

Úloha A6.1.

Řešte diferenciální rovnici prvního řádu nerozřešenou vzhledem k derivaci. Nalezněte i případná singulární řešení.

a) $y = 1 + y'^2$; b) $y = xy' - y'^2$; c) $y = xy' - \sqrt{1 + y'^2}$;

d) $y = xy' + \dfrac{1}{2y'^2}$; e) $y = xy'^2 + y'^2$; f) $2y = \dfrac{xy'^2}{y' + 2}$.

Průvodce studiem.

Ukázkou vybraných typů rovnic nerozřešených vzhledem k derivaci jste ukončil(a) první a nejdelší část tohoto modulu – diferenciální rovnice prvního řádu. Příště Vás čekají rovnice vyššího řádu. Pokud Vás studium vysílilo, doporučuji odpočinek a nechat látku trochu uležet.

Korespondenční úkol k části A.

Zvolte si z úloh každé kapitoly jednu diferenciální rovnici a tu podrobně vyřešte. Volte prosím mezi rovnicemi, označenými písmeny d), e), f), případně g). Úlohy vypracujte maximálně přehledně, nemusí být nutně zpracovány pomocí počítače.

B. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍHO ŘÁDU

B1. JEDNODUCHÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍHO ŘÁDU

V této kapitole se dozvíte:

- jak se řeší nejjednodušší rovnice vyššího řádu.

Budete schopni:

- vyřešit vybrané typy rovnic prvního řádu nerozřešených vzhledem k derivaci.

Klíčová slova této kapitoly:

jednoduché diferenciální rovnice vyššího řádu, snížení řádu diferenciální rovnice.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:

0,25 + 1,5 hodiny (teorie + řešení úloh)

Rovnice typu $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$**.**

Řeší se n-násobnou integrací. Např. rovnice druhého řádu $y'' = f(x, y)$ má řešení $y = \int y'(x)\mathrm{d}x$, kde $y' = \int f(x)\mathrm{d}x$.

Rovnice typu $\boxed{F\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{n}\right) = 0}$**, kde** $m \geq 1$**.**

Rovnici substitucí $y^{(m)} = z$ převedeme na rovnici $(n-m)$-tého řádu $F\left(x, z, z', \dots, z^{n-m}\right) = 0$ pro funkci $z(x)$. Po jejím vyřešení opakovanou integrací (viz předchozí typ) obdržíme $y(x)$. Uvedený postup se nazývá *snížení řádu diferenciální rovnice.*

Poznámka.

Speciální tvar $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$, resp. $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ můžeme uvedeným postupem převést dokonce na rovnici prvého řádu.

Rovnice typu $\boxed{y'' = f(y)}$**.**

Vynásobíme-li tuto rovnici y', dostaneme rovnici $y'y'' = f(y)y'$, odkud $\frac{1}{2}y'^2 = \int f(y)\mathrm{d}y$, což je rovnice prvního řádu. O platnosti úpravy se můžeme přesvědčit derivací poslední rovnice podle x.

Rovnice, jejichž levá strana je úplnou derivací.

Rovnice tvaru $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = f\left(x\right)}$. Na levé straně je úplná derivace výrazu nižšího řádu. Integrací obou stran rovnice dostaneme diferenciální rovnici $\left(n-1\right)$-ního řádu.

Příklad 1.

Řešte diferenciální rovnici $y''' = \dfrac{6}{x^3}$.

Řešení.

Přímou integrací výchozí rovnice třetího řádu podle proměnné x dostaneme rovnici druhého řádu

$$y'' = \int \frac{6}{x^3}\,dx = -\frac{3}{x^2} + C_1\,,$$

její integrací obdržíme rovnici prvního řádu

$$y' = \int\left(-\frac{3}{x^2} + C_1\right)dx = \frac{3}{x} + C_1 x + C_2\,,$$

a integrací této rovnice získáme rovnici

$$y = \int\left(\frac{3}{x} + C_1 x + C_2\right)dx = \underline{\underline{3\ln x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3}}\,,$$

která představuje *obecné řešení* výchozí rovnice.

Příklad 2.

Řešte diferenciální rovnici $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

Řešení.

V řešené rovnici druhého řádu není explicitně vyjádřena proměnná y. Můžeme proto substitucí $y' = z$ snížit řád rovnice a dostaneme rovnici prvního řádu pro funkci $z\left(x\right)$ $x^3 z' + x^2 z = 1$.

Jedná se o lineární rovnici, kterou již umíme řešit. Její obecné řešení je $z = \dfrac{C}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Nyní se vrátíme k původní proměnné y dosazením zpětné substituce $z = y'$. Dostaneme jednoduchou diferenciální rovnici $y' = \dfrac{C}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, jejíž přímou integrací a přejmenováním konstanty C na C_1 obdržíme *obecné řešení* výchozí rovnice $y = \displaystyle\int\left(\frac{C_1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \underline{\underline{C_1 \ln x + \frac{1}{x^2} + C_2}}$.

Shrnutí kapitoly:

V této kapitole jsou uvedeny pouze nejjednodušší typy rovnic vyššího řádu, jejichž řešení nevyžaduje žádné zvláštní znalosti nebo u kterých lze snadno snížit řád diferenciální rovnice.

Rovnice $y^{(n)} = f(x)$ je řešitelná opakovanou n-násobnou integrací.

Pokud se v diferenciální rovnici nevyskytuje funkce y a nejnižší přítomnou derivací je $y^{(m)}$, lze snížit řád rovnice substitucí $y^{(m)} = z$.

Rovnici druhého řádu $y'' = f(y)$ lze vynásobením y' a integrací podle y převést na rovnici prvního řádu.

Někdy lze diferenciální rovnici převést na tvar, kdy na jedné straně je úplná derivace nějakého výrazu podle x a na pravé straně libovolná funkce x. Pak integrací rovnice snížíme její řád o jednotku.

Otázky:

- Uveďte jednoduché případy diferenciálních rovnic vyššího řádu, které se dají snadno řešit nebo u kterých lze alespoň snížit jejich řád.

Úloha B1.1.

Řešte diferenciální rovnici typu $y^{(n)} = f(x)$.

a) $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

b) $y''' = \sqrt{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.

Úloha B1.2.

Řešte rovnici typu $F\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{n}\right)$, kde $m \geq 1$.

a) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$;

b) $y'' x \ln x = y'$.

Průvodce studiem.

V této kapitole byly probrány velmi jednoduché případy rovnic vyššího řádu. Nepředpokládám, že by Vám tato látka dělala nějaké potíže.

B2. LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE VYŠŠÍHO ŘÁDU

V této kapitole se dozvíte:

- co rozumíme pojmem lineární diferenciální rovnice n-tého řádu;
- jaké jsou základní teoretické výsledky týkající se tvaru, existence a jednoznačnosti řešení této rovnice.

Budete schopni:

- reprodukovat základní teoretické výsledky ohledně lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Klíčová slova této kapitoly:

lineární diferenciální rovnice n-tého řádu homogenní a nehomogenní, fundamentální systém řešení, metoda variace konstant..

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,75 + 0,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Rovnici typu

$$\boxed{y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=f(x)},$$

kde $f(x), a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ jsou libovolné funkce spojité v určitém intervalu I, nazýváme lineární rovnicí n-tého řádu.

Tato rovnice je v obecném případě obtížně řešitelná, záleží na konkrétním tvaru funkcí $f(x), a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$. Uveďme alespoň základní teoretické výsledky

Věta.
Jestliže funkce $a_0(x), \ldots,\ a_{n-1}(x),\ f(x)$ jsou spojité v intervalu *I*, pak se dá dokázat, že existuje právě jedno řešení uvedené rovnice, definované v celém intervalu *I*, které splňuje počáteční podmínky $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}$, kde $x_0 \in I$ a čísla y_0, y_1, …, $y_{(n-1)}$ jsou libovolná reálná.

Definice.
Rovnici $y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=0$ nazýváme *homogenní lineární rovnicí* (tj. rovnicí bez pravé strany) příslušnou k původní (nehomogenní) rovnici.

Věta.
Libovolná lineární kombinace řešení homogenní lineární rovnice je také jejím řešením.

Důkaz.
Plyne z linearity derivace (libovolného řádu).

Definice.

fundamentální systém

Systém $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ lineárně nezávislých (v intervalu *I*) řešení homogenní lineární rovnice se nazývá *fundamentální systém* této rovnice.

Věta.
Tvoří-li funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ fundamentální systém homogenní lineární rovnice, pak obecný integrál této rovnice má tvar $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$, kde c_1, c_2, …, c_n jsou libovolné konstanty.

Věta.
Je-li $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ fundamentální systém homogenní rovnice, pak obecný integrál nehomogenní rovnice má tvar $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n + y_p$, kde c_1, c_2, …, c_n jsou libovolné konstanty a y_p je jakékoliv řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice.

Důkaz.
Stačí dosadit uvedené řešení do nehomogenní rovnice a opět využít její linearity.

Poznámka.
Obecný integrál nehomogenní rovnice je tedy součtem obecného integrálu rovnice homogenní a libovolného partikulárního integrálu rovnice nehomogenní.

Věta (metoda variace konstant).
Partikulární integrál $y_p(x)$ lze hledat ve tvaru $y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + ... + c_n(x) y_n(x)$, tj. ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice, kde však veličiny c_1, c_2, …, c_n nepovažujeme za konstanty, ale neznámé funkce proměnné *x* (tzv. *metoda variace konstant*). Neznámé funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_n(x)$ vyhovují soustavě diferenciálních rovnic prvního řádu

variace konstant

$$
\begin{array}{l}
c_1' y_1 \; + \; c_2' y_2 \; + \; ... \; + c_n' y_n \; = 0 \\
c_1' y_1' \; + c_2' y_2' \; + \; ... \; + c_n' y_n' \; = 0 \\
-------------------- \\
c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \; ... \; + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x)
\end{array}
.
$$

Tuto soustavu řešíme obdobným postupem jako algebraické soustavy lineárních rovnic (eliminační metodou, Cramerovým pravidlem apod.). Integrací získaných prvních derivací $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, …, $c_n'(x)$ nakonec dostaneme hledané funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_n(x)$.

Shrnutí kapitoly:

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu je rovnice tvaru $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$. Rozlišujeme rovnici homogenní ($f(x)=0$) a nehomogenní ($f(x)\neq 0$). Řešit obecně lineární rovnici není možné, ale platí několik důležitých teoretických výsledků.

Jsou-li funkce $a_0(x),\ldots,\ a_{n-1}(x),\ f(x)$ spojité v intervalu I, existuje v tomto intervalu právě jedno řešení, splňující počáteční podmínku.

Libovolná lineární kombinace řešení homogenní rovnice je opět jejím řešením.

Fundamentálním systémem nazýváme n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice.

Obecné řešení homogenní rovnice má tvar lineární kombinace funkcí fundamentálního systému, kde koeficienty lineární kombinace je n nezávislých parametrů (konstant).

Obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze najít metodou variace konstant.

Otázky:

- Definujte lineární diferenciální rovnici n-tého řádu.
- Jak je to s existencí a jednoznačností řešení této rovnice?
- Jak je definován fundamentální systém a co víte o vlastnostech řešení homogenní lineární rovnice?
- Jak lze zkonstruovat obecné řešení homogenní rovnice a jak řešení nehomogenní rovnice?
- K čemu slouží a jak se přesně provádí metoda variace konstant?

Průvodce studiem.

V této kapitole jste se dověděl(a) základní teoretické pojmy a poznatky, potřebné k řešení lineární diferenciální rovnice vyššího řádu. Tyto poznatky použijete v následujících dvou kapitolách, kde se naučíte řešit speciální tvar této rovnice, kdy funkce $a_0(x),\ldots,\ a_{n-1}(x)$ *jsou konstantní v řešeném oboru.*

B3. HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

V této kapitole se dozvíte:

- co rozumíme pojmem homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty;
- přesný postup řešení uvedené rovnice.

Budete schopni:

- řešit libovolnou homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

Klíčová slova této kapitoly:

homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, charakteristická rovnice, fundamentální systém.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
1,0 + 3,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Homogenní lineární rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$\boxed{y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0},$$

kde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$ jsou konstanty.

Poznámka.
Připomeňme, že v obecné lineární rovnici byly veličiny $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$ funkcemi nezávisle proměnné x.

Metoda řešení.
Předpokládáme řešení ve tvaru $y=e^{\alpha x}$. Po dosazení do homogenní rovnice a vydělení rovnice výrazem $e^{\alpha x}$ obdržíme tzv. *charakteristickou rovnici*

charakteristická rovnice

$$\boxed{\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0=0},$$

což je algebraická rovnice *n*-tého stupně pro neznámou α. Tato rovnice má právě *n* kořenů $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_n$.

Mohou nastat dva případy:
Všechny kořeny jsou navzájem různé, pak fundamentální systém homogenní rovnice je tvořen *n* funkcemi $y_1=e^{\alpha_1 x}, y_2=\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ y_n=e^{\alpha_n x}$.
Je-li některý kořen α_k *r*-násobný, pak mu ve fundamentálním systému odpovídá *r* (lineárně nezávislých) funkcí $y_1=e^{\alpha_k x}, y_2=\ xe^{\alpha_k x},\ \ldots,\ y_r=x^{r-1}e^{\alpha_k x}$.

Je-li fundamentální systém nalezen, podle výsledků předcházející kapitoly lze zkonstruovat obecné řešení ve tvaru lineární kombinace funkcí fundamentálního systému $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$.

Poznámka.

a) Charakteristickou rovnici nalézáme v praxi snadno tak, že v původní rovnici nahradíme k-tou derivaci funkce y k-tou mocninou neznámé α.

b) Je-li charakteristická rovnice vyššího stupně než třetího, může být nalezení jejích kořenů bez použití počítače značně obtížné. Naštěstí nejčastějším případem v praxi jsou diferenciální rovnice prvního a druhého řádu, vedoucí ke snadno řešitelným lineárním a kvadratickým charakteristickým rovnicím.

Kořeny charakteristické rovnice mohou být obecně komplexní, a pak jsou komplexní také příslušné funkce fundamentálního systému. Pokud pracujeme v reálném oboru (a to je náš případ), zajímají nás ovšem přednostně reálná řešení. Ukazuje se, že je možné „nevhodná" komplexní řešení nahradit reálnými.

Přechod od komplexních řešení k reálným.

Jsou-li konstanty a_0, a_1, ..., a_{n-1} reálné, musí (jak plyne z teorie algebraických rovnic) ke každému komplexnímu kořenu $a + \mathrm{i}b$ charakteristické rovnice existovat také kořen komplexně sdružený $a - \mathrm{i}b$, a to stejné násobnosti.

Místo, abychom do fundamentálního systému vzali komplexní funkce $e^{(a+\mathrm{i}b)x}$, $e^{(a-\mathrm{i}b)x}$, použijeme jejich vhodné lineární kombinace, a to takové, aby výsledné funkce byly nezávislé a reálné.

Eulerův vzorec

Na základě Eulerova vzorce z teorie komplexních čísel $e^{a\pm \mathrm{i}b} = e^a \left(\cos b \pm \mathrm{i} \sin b\right)$ je zřejmé, že nejjednodušší je vzít lineární kombinace $\frac{1}{2}\left(e^{(a+\mathrm{i}b)x} + e^{(a-\mathrm{i}b)x}\right) = e^{ax}\cos bx$ a $\frac{1}{2i}\left(e^{(a+\mathrm{i}b)x} - e^{(a-\mathrm{i}b)x}\right) = e^{ax}\sin bx$, nebo-li reálnou a imaginární část komplexní funkce $e^{(a+\mathrm{i}b)x}$.

Pokud jsou kořeny $a + \mathrm{i}b$, $a - \mathrm{i}b$ r-násobné, vezmeme dále do fundamentálního systému reálné funkce $xe^{ax}\cos bx$, $xe^{ax}\sin bx$, …, $x^{r-1}e^{ax}\cos bx$, $x^{r-1}e^{ax}\sin bx$.

Tím je problém nalezení reálného fundamentálního systému homogenní rovnice s konstantními koeficienty (a tedy i jejího obecného integrálu) úspěšně uzavřen.

Příklad 1.

Řešte homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

Řešení.

Předpokládáme řešení ve tvaru $y = e^{\alpha x}$. Po dosazení do původní rovnice a vydělení celé rovnice faktorem $e^{\alpha x}$ dostaneme charakteristickou rovnici (kterou ovšem můžeme také napsat přímo podle výchozí diferenciální rovnice) $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha - 4 = 0$.

Charakteristický polynom na levé straně této rovnice má jednoduchý reálný kořen 1 a dvojnásobný reálný kořen 2, což je možno ověřit součinem kořenových činitelů $(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 2)$.

Fundamentální systém řešené rovnice tudíž tvoří funkce $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ a $y_3 = xe^{2x}$. Činitel x ve funkci y_3 je dán obecným pravidlem, kdy r-násobnému kořenu α_k charakteristické rovnice odpovídá r lineárně nezávislých funkcí $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}$.

Obecné řešení výchozí rovnice je tvořeno lineární kombinací funkcí fundamentálního systému, tzn. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = \underline{\underline{C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)e^{2x}}}$.

Příklad 2.

Řešte homogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Řešení.

Charakteristická rovnice má tvar $\alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0$ a její kořeny jsou komplexně sdružené $\alpha_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\mathrm{i}$.

Komplexní fundamentální systém tvoří funkce $y = e^{(2+3\mathrm{i})x}$ a $y = e^{(2-3\mathrm{i})x}$.

Reálný fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1 = e^{2x}\cos 3x$ a $y_2 = e^{2x}\sin 3x$, nebo-li reálnou a imaginární částí funkce $y = e^{(2+3\mathrm{i})x}$.

Obecné řešení tudíž má tvar $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \underline{\underline{C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x}}$.

Shrnutí kapitoly:

Homogenní lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty n-tého řádu je rovnice tvaru $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, kde a_0, a_1, ..., a_{n-1} jsou konstanty.

Pro vlastnosti řešení této rovnice platí vše co pro obecnou homogenní lineární diferenciální rovnici. Zejména platí, že obecné řešení je lineární kombinací funkcí fundamentálního systému.

K nalezení fundamentálního systému existuje přesný algoritmus. Je založen na předpokladu exponenciálního tvaru řešení $y = e^{\alpha x}$, který vede na tzv. charakteristickou rovnici pro neznámý exponent α. Jedná se o algebraickou rovnici n-tého stupně, která má právě n kořenů. Po nalezení těchto kořenů lze zkonstruovat fundamentální systém, přičemž je ale nutno vzít v úvahu případnou násobnost některých kořenů.

Jsou-li některé kořeny komplexní, dají se odpovídající komplexní funkce fundamentálního systému nahradit reálnými.

Otázky:

- Definujte homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty n-tého řádu. Čím se liší od obecné homogenní lineární diferenciální rovnice?
- Jak se přesně řeší homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty? Co je to charakteristická rovnice? Jakou roli hrají její kořeny?
- Jak se řeší případy, kdy charakteristická rovnice má vícenásobné kořeny nebo komplexní kořeny?
- Jak sestavíme obecné řešení, známe-li fundamentální systém?

Úloha B3.1.

Řešte homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$; b) $y'' - 4y' + 4y = 0$; c) $y'' - 4y = 0$; d) $y'' + 4y = 0$;
e) $y'' + 4y' = 0$; f) $y'' + 3y' - 4y = 0$; g) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$; h) $y''' - 8y = 0$;
i) $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0$; j) $y^{(4)} - 16y = 0$; k) $y^{(4)} + 4y = 0$.

Průvodce studiem.

Tak co říkáte na homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty? Asi to pro Vás nebyla právě jednoduchá kapitola, ale po prostudování příkladů a vyřešení úloh jste možná zjistil(a), že to není tak těžké. Velkou výhodou totiž je, že nám teorie poskytuje přesný algoritmus, jak zkonstruovat fundamentální systém řešení, potažmo obecné řešení. Není proto vlastně vůbec nutné nad něčím moc přemýšlet, stačí jít krok za krokem podle návodu. Nezbytné ovšem je tento návod dokonale pochopit a zapamatovat si jej.

B4. NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

V této kapitole se dozvíte:

- co rozumíme pojmem nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty;
- přesný postup řešení uvedené rovnice.

Budete schopni:

- řešit libovolnou nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

Klíčová slova této kapitoly:

nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, metoda variace konstant, metoda speciální pravé strany.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,5 + 3,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Nehomogenní lineární rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}\,,$$

kde a_0, a_1, ..., a_{n-1} jsou konstanty a funkce $f(x)$ je různá od nulové funkce.

Metoda řešení.
Z teorie obecné lineární diferenciální rovnice víme, že obecný integrál nehomogenní rovnice můžeme psát ve tvaru $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_p$, kde $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ tvoří fundamentální systém homogenní rovnice, c_1, c_2, …, c_n jsou libovolné konstanty a y_p je jakékoliv řešení (partikulární integrál) nehomogenní rovnice. Určit fundamentální systém homogenní rovnice již umíme (viz předchozí kapitolu), stejně jako vypočítat partikulární integrál y_p metodou variace konstant.

Metoda variace konstant ale není vždy tou nejrychlejší a nejsnazší cestou. Pro některé funkce $f(x)$ (tzv. *speciální pravé strany)* můžeme totiž tvar partikulárního integrálu předem „odhadnout“ a následně poměrně jednoduše dopočítat. Hovoří o tom následující věta.

Věta (metoda speciální pravé strany).
Nechť pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty má tvar

$$\boxed{f(x) = e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou mnohočleny obecně různého, nejvýše však s-tého stupně s reálnými koeficienty, a, b jsou libovolná reálná čísla.
Jestliže $a+\mathrm{i}b$ (a tedy ani $a-\mathrm{i}b$) není kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$\boxed{y_p = e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right]},$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou mnohočleny nejvýše s-tého stupně.
Je-li $a+\mathrm{i}b$ (a tedy i $a-\mathrm{i}b$) r-násobným kořenem charakteristické rovnice, pak partikulární integrál má tvar

$$\boxed{y_p = x^r e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right]},$$

kde $R(x)$, $S(x)$ jsou mnohočleny nejvýše s-tého stupně.

Poznámka.

a) Uvedená speciální pravá strana zahrnuje širokou třídu funkcí, se kterou v praxi obvykle vystačíme. Tak např. pro $a=0$, $b=0$ přechází pravá strana v polynom $P(x)$, pro $a\neq 0$, $b=0$ a $P(x)\equiv 1$ dostáváme na pravé straně exponenciální funkci e^{ax}, pro $a=0$, $b\neq 0$, $P(x)\equiv 1$ a $Q(x)\equiv 0$ (resp. $P(x)\equiv 0$ a $Q(x)\equiv 1$) dostaneme $\cos bx$ (resp. $\sin bx$) apod.

b) Z předchozí poznámky a poslední věty plyne, že je-li pravá strana ve tvaru polynomu, je třeba při hledání partikulárního integrálu vyšetřit, zda charakteristická rovnice nemá kořen $0(=0+\mathrm{i}0)$. Pokud je na pravé straně exponenciála e^{ax}, je nutné vyšetřit existenci kořene $a(=a+\mathrm{i}0)$, a pokud je na pravé straně funkce $\cos bx$ nebo $\sin bx$, je třeba vyšetřit existenci kořene $\mathrm{i}b(=0+\mathrm{i}b)$.

c) Pozor na případ, kdy na pravé straně je pouze jedna z funkcí $\cos bx$, $\sin bx$. Partikulární integrál y_p musíme hledat (v souladu s poslední větou) ve tvaru, obsahujícím <u>obě</u> tyto goniometrické funkce!

Po provedení odhadu tvaru partikulárního řešení y_p zbývá pouze nalézt neznámé koeficienty polynomů $R(x)$ a $S(x)$. Dosadíme předpokládaný tvar y_p a jeho potřebné derivace do původní nehomogenní rovnice. Obdržíme rovnici, ze které neznámé koeficienty tzv. *metodou neurčitých koeficientů* jednoznačně dopočteme.

Metoda neurčitých koeficientů.
Je široce používaná metoda v různých partiích matematiky. Vysvětlíme její princip na jednoduchém příkladu.
Mějme např. rovnici $(A+B)x+(B-A)=2x+4$. Tuto rovnici chápeme jako funkční rovnost, tzn. funkce na pravé straně má být identická s funkcí na levé straně. To je možné pouze tehdy, jsou-li koeficienty u stejných mocnin x stejné na obou stranách rovnice. Neznámé konstanty A, B nalezneme tedy tak, že porovnáme koeficienty (odtud název metody) u jednotlivých mocnin x na levé a pravé straně. Obdržíme tím dvě rovnice, $A+B=2$ (koeficienty u x), $B-A=4$ (koeficienty u $x^0 \equiv 1$), ze kterých není problémem vypočítat $A=-1$, $B=2$.
Místo funkcí $1 \equiv x^0$, x atd. mohou v rovnicích figurovat libovolné jiné lineárně nezávislé funkce, např. $\sin bx$, $\cos bx$, $x\sin bx$, $x\cos bx$, e^{ax}, $x \cdot e^{ax}$, $x^2 \cdot e^{ax}$ atd.

součet speciálních pravých stran

Jestliže má pravá strana tvar součtu funkcí uvedeného speciálního tvaru, např. $f(x)=e^{2x}+e^{-3x}$ apod., je také partikulární integrál součtem příslušných „dílčích“ partikulárních integrálů. Je proto v takovém případě nejjednodušší hledat každý dílčí partikulární integrál zvlášť a výsledky sečíst.

Shrnutí kapitoly:
Nehomogenní lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty n-tého řádu je rovnice tvaru $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f(x)$, kde a_0, a_1, ..., a_{n-1} jsou konstanty a funkce $f(x)$ je různá od nulové funkce.
Pro vlastnosti řešení této rovnice platí vše co pro obecnou nehomogenní lineární diferenciální rovnici. Zejména platí, že obecné řešení je součtem obecného řešení homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice a že toto partikulární řešení lze vždy nalézt metodou variace konstant.
Pro tzv. speciální pravé strany tvaru $f(x)=e^{ax}\left[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx\right]$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou libovolné mnohočleny, existuje efektivnější metoda určení partikulárního řešení y_p, která obchází nutnost integrovat. Tvar partikulárního řešení y_p se „odhadne“ podle tvaru pravé strany a dopočítají se pouze hodnoty neznámých parametrů vystupujících v y_p. Uvedený „odhad“ má svá přesná pravidla, která je nutné přesně znát.

Otázky:

- Definujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty n-tého řádu. Čím se liší od obecné nehomogenní lineární diferenciální rovnice?
- Jak se přesně řeší nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty?
- Jakými dvěma metodami můžeme většinou hledat partikulární integrál nehomogenní rovnice? Která z těchto metod funguje vždy?
- Jak zní přesná pravidla pro konstrukci partikulárního řešení nehomogenní rovnice metodou speciální pravé strany?
- Vysvětlete metodu neurčitých koeficientů.

Příklad 1.

Řešte nehomogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

Řešení.

Obecné řešení nehomogenní rovnice můžeme hledat ve tvaru součtu obecného řešení y_h homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice:

$$y = y_h + y_p .$$

Homogenní rovnici již vyřešit umíme. Charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen $\alpha_{1,2} = 1$ a tedy příslušné obecné řešení má tvar $\boxed{y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x}$.

Hledejme nyní partikulární integrál y_p. Pravá strana má tzv. *speciální tvar* $e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]$, kde $a = 2$, $b = 0$, $P(x) = 1$, tudíž můžeme tvar partikulárního integrálu „odhadnout“. Protože charakteristická rovnice nemá žádný kořen roven hodnotě $a + ib = 2$, předpokládáme tvar partikulárního integrálu zcela obdobný pravé straně, tj. $\boxed{y_p = Ae^{2x}}$. Pokud by existoval r-násobný kořen 2 charakteristické rovnice, předpokládali bychom tvar $y_p = x^r A e^{2x}$. Koeficient A reprezentuje zatím neznámý polynom nultého řádu. Dosazením předpokládaného partikulárního řešení do výchozí (nehomogenní) rovnice snadno nalezneme, že $A = 1$, a tedy $y_p = e^{2x}$.

Obecný integrál nehomogenní rovnice tudíž je $\boxed{\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}}}}$.

Druhou možností k určení partikulárního integrálu y_p, kterou můžeme použít pro jakýkoliv tvar pravé strany, je metoda variace konstant. Vycházíme při ní z předpokladu, že y_p má stejný tvar jako y_h, kde ale veličiny C_1, C_2 jsou zatím neznámé funkce proměnné x, tj. $\boxed{y_p = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x}$.

První derivace funkcí C_1, C_2 hledáme podle teorie jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$C_1' e^x + C_2' x e^x = 0$$

$$C_1' (e^x)' + C_2' (x e^x)' = e^{2x}$$

Řešení této soustavy je jednoduché (např. Cramerovým pravidlem). Dostaneme $C_1' = -x e^x$, $C_2' = e^x$, odkud přímou integrací $C_1 = -\int x e^x \mathrm{d}x = (1 - x) e^x$, $C_2 = \int e^x \mathrm{d}x = e^x$.

Integrační konstanty při integraci nepíšeme (volíme rovny nule), protože nám stačí jakékoliv řešení. Dosazením nalezených funkcí do předpokládaného tvaru y_p získáme hledaný partikulární integrál

$$\underline{\underline{y_p}} = (1 - x) e^x e^x + e^x x e^x = e^{2x} - x e^{2x} + x e^{2x} = \underline{\underline{e^{2x}}} .$$

Obdržený výsledek je shodný s předchozím. Můžeme konstatovat, že metoda řešení „odhadem“ podle tvaru pravé strany zde jednodušší a rychlejší než metoda variace konstant.

Příklad 2.

Řešte nehomogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

Řešení.

Obecné řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru součtu obecného řešení y_h homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice

$$\boxed{y = y_h + y_p}.$$

Charakteristická rovnice má komplexně sdružené kořeny $\alpha_{1,2} = -2 \pm \mathrm{i}$ a tedy obecné řešení homogenní rovnice má tvar

$$\boxed{y_h = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x}.$$

Hledejme nyní partikulární integrál y_p. Pravá strana výchozí rovnice má tvar polynomu druhého řádu. Jedná se tedy o tzv. *speciální pravou stranu* $e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]$, kde $a = 0$, $b = 0$, $P(x) = 5x^2 - 32x + 5$. Protože charakteristická rovnice nemá žádný kořen roven hodnotě $a + ib = 0$, předpokládáme tvar partikulárního integrálu zcela obdobný pravé straně, tj. ve tvaru polynomu druhého řádu

$$\boxed{y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0}.$$

Pokud by existoval r-násobný kořen 0 charakteristické rovnice, předpokládali bychom tvar $y_p = x^r \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)$.

Neznámé koeficienty a_2, a_1, a_0 určíme *metodou neurčitých koeficientů*. Dosazením předpokládaného partikulárního řešení do výchozí (nehomogenní) rovnice a jednoduché úpravě obdržíme rovnici $5a_2 x^2 + \left(8a_2 + 5a_1\right)x + 2a_2 + 4a_1 + 5a_0 = 5x^2 - 32x + 5$.

Tato rovnice může být identicky splněna pouze tehdy, jsou-li koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x na obou stranách rovnice stejné, tzn. platí-li $5a_2 = 5$, $8a_2 + 5a_1 = -32$, $2a_2 + 4a_1 + 5a_0 = 5$. Řešením této soustavy tří lineárních rovnic pro tři neznámé jsou hodnoty $a_2 = 1,\ a_1 = -8,\ a_0 = 7$. Dosazením tohoto výsledku do předpokládaného tvaru y_p obdržíme výsledný partikulární integrál

$$\boxed{y_p = x^2 - 8x + 7}.$$

Obecný integrál nehomogenní rovnice tudíž je

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + x^2 - 8x + 7}.$$

Příklad 3.

Řešte nehomogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty $y'' + 9y = \sin 3x$.

Řešení.
Obecné řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru součtu obecného řešení y_h homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice

$$\boxed{y = y_h + y_p}.$$

Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\alpha_{1,2} = \pm 3\,\mathrm{i}$ a tedy příslušné obecné řešení má tvar

$$\boxed{y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x}.$$

Hledejme nyní partikulární integrál y_p. Pravá strana výchozí rovnice má tvar $\sin 3x$. Jedná se tedy o tzv. *speciální pravou stranu* $e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]$, kde $a = 0$, $b = 3$, $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$. Protože charakteristická rovnice má jeden jednoduchý kořen roven hodnotě $a + \mathrm{i}b = 3\mathrm{i}$, předpokládáme tvar partikulárního integrálu

$$\boxed{y_p = x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)}.$$

Neznámé koeficienty A, B představují neznámé polynomy nultého řádu a určíme je tzv. *metodou neurčitých koeficientů*. Dosazením předpokládaného partikulárního řešení y_p do výchozí (nehomogenní) rovnice, provedení potřebných derivací a jednoduché úpravě obdržíme rovnici $-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = \sin 3x$.
Tato rovnice může být identicky splněna pouze tehdy, jsou-li koeficienty u jednotlivých goniometrických funkcí na obou stranách rovnice stejné, tzn. platí-li $-6A = 1,\ 6B = 0$. Odtud dostáváme $A = -\frac{1}{6},\ B = 0$.
Dosazením tohoto výsledku do y_p obdržíme partikulární integrál

$$\boxed{y_p = -\frac{x}{6}\cos 3x}.$$

Obecný integrál nehomogenní rovnice tudíž je

$$\boxed{y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{6}\cos 3x}.$$

Příklad 4.

Řešte nehomogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

Řešení.

Obecné řešení nehomogenní rovnice můžeme hledat ve tvaru součtu obecného řešení y_h homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice

$$\boxed{y = y_h + y_p}.$$

Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\alpha_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$ a tedy příslušné obecné řešení má tvar

$$\boxed{y_h = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x}.$$

Hledejme nyní partikulární integrál y_p. Protože pravá strana nemá speciální tvar $e^{ax}\left[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right]$, musíme použít *metodu variace konstant*. Vycházíme při ní z předpokladu, že y_p má stejný tvar jako y_h, avšak veličiny C_1, C_2 jsou zatím neznámé funkce proměnné x, tj.

$$\boxed{y_p = C_1(x) e^{2x} \cos x + C_2(x) e^{2x} \sin x}.$$

První derivace funkcí C_1, C_2 hledáme podle teorie jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$C_1' e^{2x} \cos x + C_2' e^{2x} \sin x = 0$$

$$C_1'(e^{2x} \cos x)' + C_2'(e^{2x} \sin x)' = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

Řešení této soustavy je jednoduché (např. Cramerovým pravidlem). Dostaneme $C_1' = -\mathrm{tg}\ x$, $C_2' = 1$, odkud přímou integrací $C_1 = -\int \mathrm{tg}\ x \mathrm{d}x = \ln \cos x$, $C_2 = \int 1 \mathrm{d}x = x$.

Integrační konstanty při integraci nepíšeme (volíme rovny nule), protože nás zajímá libovolné řešení. Dosazením nalezených funkcí do y_p získáme hledaný partikulární integrál

$$\boxed{y_p = (\ln \cos x) e^{2x} \cos x + x e^{2x} \sin x}.$$

Obecný integrál nehomogenní rovnice tudíž je

$$\boxed{y = e^{2x}\left[(C_1 + \ln \cos x)\cos x + (C_2 + x)\sin x\right]}.$$

Úloha B4.1.

Řešte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

a) $y'' - 3y' + 2y = e^x$; b) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$; c) $y'' - 4y = 8x^3$;

d) $4y'' - y = x^3 - 24x$; e) $y'' + y' + \dfrac{5}{2}y = 25\cos 2x$; f) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$;

g) $y'' - 2y = xe^{-x}$; h) $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$; i) $y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}$;j) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$;

k) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$; l) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

Průvodce studiem.

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty představují pomyslný vrchol tohoto modulu. Umíte-li řešit tyto rovnice, dokazuje to, že jste zvládl(a) poměrně náročnou část vyšší aplikované matematiky. Navíc, tyto rovnice představují v praxi nejpoužívanější typ diferenciálních rovnic. Nejjednodušší matematický model většiny problémů přírodních i jiných věd bývá tvořen právě těmito rovnicemi.

Vím, že zpočátku není tato problematika jednoduchá. Ale nepodléhejte depresi, pokud se Vám zatím řešení moc nedaří. Zeptejte se sám (sama) sebe, co konkrétně Vám nejde, a na to se znovu podívejte do teorie a ukázkových příkladů.

Korespondenční úkol k části B.

V úloze B4.1 zvolte dvě rovnice z rovnic označených písmeny d) až l) a ty podrobně vyřešte.

C. SOUSTAVY OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

C1. ZÁKLADNÍ POJMY

V této kapitole se dozvíte:

- co rozumíme pojmem obecná soustava diferenciálních rovnic a jak je definován její řád;
- jak je definována normální soustava diferenciálních rovnic;
- jak se dá převést na normální soustavu diferenciální rovnice vyššího řádu nebo obecná soustava diferenciálních rovnic ;
- jak je definováno řešení nebo-li integrál normální soustavy diferenciálních rovnic;
- co jsou to tzv. počáteční podmínky pro řešení normální soustavy diferenciálních rovnic a jak je to s existencí a jednoznačností řešení;
- definici obecného řešení normální soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

Budete schopni:

- převést diferenciální rovnici vyššího řádu nebo obecnou soustavu diferenciálních rovnic na normální soustavu.

Klíčová slova této kapitoly:

obecná soustava obyčejných diferenciálních rovnic, normální soustava obyčejných diferenciálních rovnic, počáteční podmínka pro normální soustavy diferenciálních rovnic, existence a jednoznačnost řešení normální soustavy diferenciálních rovnic, obecné řešení normální soustavy diferenciálních rovnic.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,75 + 0,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Obecnou soustavou obyčejných diferenciálních rovnic rozumíme m rovnic tvaru

$$\boxed{F_i\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2)}, \dots, y_1, y_k', \dots, y_k^{(n_k)}\right) = 0}, \ i = 1, 2, \dots, m,$$

pro k funkcí y_1, y_2, ..., y_k. Maximální číslo z čísel n_i (tj. řád nejvyšší přítomné derivace) nazýváme řádem soustavy.

Poznámka.

a) V praxi nejčastěji odpovídá počet neznámých funkcí počtu rovnic (tj. $k = m$). Dále budeme uvažovat pouze tento případ.

b) Řešit obecnou soustavu rovnic v uvedeném tvaru není snadné. Naštěstí se ukazuje, že ve většině praktických případů je možné soustavu převést na tzv. *normální* tvar.

Definice (normální soustava).
Soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}}$$

nazýváme *normální*.

Převod rovnice vyššího řádu na normální soustavu.
Uvažujme diferenciální rovnici n-tého řádu typu $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Zavedením nových funkcí $(n-1)$ rovnicemi $y_1 \equiv y'$, $y_2 \equiv y_1' = y''$, ..., $y_{n-1} \equiv y_{n-2}' = y^{(n-1)}$ se výchozí rovnice n-tého řádu pro jednu funkci y změní na tvar $y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, a tedy problém jsme převedli na řešení normální soustavy

$$\begin{array}{l} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{array}$$

pro n funkcí y, y_1, ..., y_{n-1}.

Převod obecné soustavy rovnic na normální soustavu.
Nejprve (je-li to možné) převedeme obecnou soustavu na tzv. *kanonický tvar*

kanonický tvar

$$\boxed{y_i^{(n_i)} = G_i\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2-2)}, \dots, y_1, y_m', \dots, y_m^{(n_m-1)}\right) = 0},$$
$$i = 1, 2, \dots, m,$$

nebo-li vyřešíme soustavu vzhledem k nejvyšším derivacím jednotlivých neznámých funkcí y_i. Pak pokračujeme obdobně jako v předchozí poznámce zavedením nových funkcí za derivace na pravých stranách rovnic.

Definice.
Řešením (integrálem) normální soustavy rovnic rozumíme takový systém funkcí $y_1 = g_1(x)$, $y_2 = g_2(x)$, ..., $y_n = g_n(x)$, že po dosazení do soustavy budou všechny rovnice identicky splněny v uvažovaném oboru.

Poznámka.
Pojem „řešení soustavy diferenciálních rovnic“ je v podstatě zobecněním pojmu „řešení (jedné) diferenciální rovnice“. Jak uvidíme, obdobná situace nastane i pro některé další pojmy a budou formulovány i obdobné věty, např. následující věta o existenci a jednoznačnosti řešení.

Věta (existence a jednoznačnost řešení normální soustavy).
Nechť je dána normální soustava rovnic $y_i' = f_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right)$, $i = 1, 2, ..., n$ a bod $P\left[a, b_1, b_2, ..., b_n\right]$. Nechť funkce f_1, f_2 ,..., f_n jsou spojité (jako funkce n+1 proměnných $x, y_1, y_2, ..., y_n$) v okolí bodu P a mají v něm spojité parciální derivace podle proměnných $y_1, y_2, ..., y_n$. Pak v určitém okolí bodu a existuje právě jedno řešení, které splňuje *počáteční podmínky* $y_1(a) = b_1$, $y_2(a) = b_2$, ..., $y_n(a) = b_n$.

Definice.
Obecným integrálem (obecným řešením) normální soustavy nazýváme systém funkcí

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \end{array}}$$

takový, že vhodnou volbou konstant C_1, C_2, ..., C_n lze obdržet řešení soustavy, odpovídající libovolným počátečním podmínkám z určité $(n+1)$-rozměrné oblasti Ω.

Poznámka.
Analogie mezi zavedenými pojmy pro normální soustavy diferenciálních rovnic a pro jednu diferenciální rovnici vyššího řádu (rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci) je evidentní.

Příklad.
Převeďte rovnici třetího řádu $y''' - 2xy'' + 3\sqrt{y' - 1} - y^2 = \cos 2x$ na ekvivalentní normální soustavu diferenciálních rovnic.

Řešení.
Protože normální soustava je prvního řádu, musíme se zbavit všech vyšších derivací. Zavedeme místo nich nové funkce $y_1 = y'$, $y_2 = y'' = y_1'$ a dosadíme do výchozí rovnice. Obdržíme rovnici $y_2' - 2xy_2 + 3\sqrt{y_1 - 1} - y^2 = \cos 2x$.
Úpravou nakonec obdržíme soustavu

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = 2xy_2 - 3\sqrt{y_1 - 1} + y^2 + \cos 2x, \end{array}}$$

což je požadovaná normální soustava tří rovnic pro tři funkce y, y_1, y_2.

Shrnutí kapitoly:

Obecnou soustavou obyčejných diferenciálních rovnic rozumíme určitý počet rovnic, ve kterých kromě nezávisle proměnné x vystupují první i vyšší derivace neznámých funkcí $y_i(x)$. Řádem soustavy je řád nejvyšší přítomné derivace.

V praxi je počet neznámých funkcí zpravidla roven počtu rovnic. Navíc bývají splněny podmínky, které umožňují převod obecné soustavy na tzv. normální soustavu diferenciálních rovnic, která je teoreticky i prakticky výhodnější. Normální soustavou obyčejných diferenciálních rovnic rozumíme soustavu n rovnic prvního řádu tvaru $y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pro normální soustavu definujeme pojmy řešení, počáteční podmínky, obecné řešení obdobně jako u diferenciální rovnice vyššího řádu. Platí také obdobná věta o existenci a jednoznačnosti řešení.

Otázky:

- Definujte obecně soustavu obyčejných diferenciálních rovnic a její řád
- Jak vypadá tzv. normální soustava obyčejných diferenciálních rovnic? Jakého je řádu?
- Vysvětlete pojem řešení (integrál) a obecné řešení (integrál) normální soustavy diferenciálních rovnic.
- Jak vypadají počáteční podmínky pro normální diferenciální rovnici?
- Jak je to s existencí a jednoznačností řešení normální soustavy obyčejných diferenciálních rovnic?

Průvodce studiem.

Touto teoretickou kapitolou jste zahájil(a) poslední a nejkratší část tohoto modulu, věnovanou obecným soustavám diferenciálních rovnic.

Hodně pojmů z této oblasti je vytvořeno analogicky k pojmům, které již znáte z předchozích kapitol. V tom je tato látka jednodušší, ale na druhé straně povrchní uplatnění uvedených analogií může vést k chybným závěrům.

V příští kapitole se zaměříme na soustavy lineárních diferenciálních rovnic, ale stále pouze teoreticky. Výpočty budou až v úplně poslední kapitole, věnované soustavám lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Vydržte, cíl se již blíží!

C2. NORMÁLNÍ SOUSTAVA LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

V této kapitole se dozvíte:

- jak vypadá homogenní a nehomogenní normální soustava lineárních diferenciálních rovnic;
- jak definujeme fundamentální systém této soustavy;
- jak pomocí fundamentálního systému konstruujeme obecné řešení homogenní normální soustavy lineárních diferenciálních rovnic;
- jaký tvar má obecné řešení nehomogenní normální soustavy lineárních diferenciálních rovnic včetně nalezení partikulárního řešení metodou variace konstant.

Budete schopni:

- reprodukovat základní teoretické poznatky ohledně řešení homogenní a nehomogenní normální soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

Klíčová slova této kapitoly:

normální soustava lineárních diferenciálních rovnic homogenní a nehomogenní, fundamentální systém normální soustavy lineárních rovnic, konstrukce obecného řešení homogenní a nehomogenní normální soustavy lineárních rovnic, metoda variace konstant..

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:
0,75 + 0,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Definice.
Normální soustava lineárních diferenciálních rovnic má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1' = a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\,y_n + f_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \ldots + a_{nn}(x)\,y_n + f_n(x) \end{array}},$$

vektorově

$$\boxed{\mathbf{y}' \equiv \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}},$$

kde veličiny $a_{jk}(x)$ a $f_j(x)$, kde $j,k = 1,2,\ldots,n$ jsou libovolné (reálné) funkce. Pokud jsou všechny funkce $f_j(x)$ nulové ($\mathbf{f} = 0$), jedná se o *homogenní* soustavu, jinak jde o soustavu *nehomogenní*.

Definice.
Nechť je dáno n řešení homogenní soustavy, která můžeme přehledně označit

fundamentální systém soustavy

$$\begin{array}{l} {}^1y_1(x),\ {}^1y_2(x),\ \dots,\ {}^1y_n(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}^ny_1(x),\ {}^ny_2(x),\ \dots,\ {}^ny_n(x). \end{array} \quad \text{, vektorově} \quad \begin{pmatrix} {}^1y_1 \\ {}^1y_2 \\ \dots \\ {}^1y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^2y_1 \\ {}^2y_2 \\ \dots \\ {}^2y_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} {}^ny_1 \\ {}^ny_2 \\ \dots \\ {}^ny_n \end{pmatrix}.$$

Uvedenou množinu řešení nazveme *fundamentálním systémem* homogenní soustavy v intervalu *I*, je-li funkcionální determinant

$$D(x) = \begin{vmatrix} {}^1y_1(x), & {}^2y_1(x), & \dots, & {}^ny_1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^1y_n(x), & {}^2y_n(x), & \dots, & {}^ny_n(x) \end{vmatrix}$$

v intervalu *I* různý od nuly.

Poznámka.
a) Řečeno slovně, jednotlivá řešení (jako n-rozměrné vektory) musí být lineárně nezávislá.
b) Dá se dokázat, že determinant $D(x)$ je v *I* buď stále roven nule, nebo stále od nuly různý, proto stačí vyčíslit jej v jediném bodě.

Věta (obecné řešení homogenní soustavy lineárních rovnic).
Je-li znám fundamentální systém $\{{}^k y_j\}$ homogenní soustavy , pak obecné řešení této soustavy má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = C_1\,{}^1y_1 + C_2\,{}^2y_1 + \dots + C_n\,{}^ny_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = C_1\,{}^1y_n + C_2\,{}^2y_n + \dots + C_n\,{}^ny_n. \end{array}},$$

vektorově

$$\boxed{{}^{\mathrm{h}}\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} {}^1y_1 \\ {}^1y_2 \\ \dots \\ {}^1y_n \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} {}^2y_1 \\ {}^2y_2 \\ \dots \\ {}^2y_n \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} {}^ny_1 \\ {}^ny_2 \\ \dots \\ {}^ny_n \end{pmatrix}}.$$

Poznámka.
Na vektorovém tvaru lze vidět, že obecné řešení je lineární kombinací jednotlivých řešení fundamentálního systému, podobně jako tomu bylo v teorii řešení lineární diferenciální rovnice vyššího řádu.

Věta (obecné řešení nehomogenní normální soustavy lineárních rovnic).
Nechť je dán fundamentální systém $\left\{{}^{k}y_j\right\}$ homogenní soustavy, příslušné k nehomogenní soustavě . Obecný integrál nehomogenní soustavy má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = C_1\,{}^{1}y_1 + C_2\,{}^{2}y_1 + \ldots + C_n\,{}^{n}y_1 + {}^{\mathrm{p}}y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = C_1\,{}^{1}y_n + C_2\,{}^{2}y_n + \ldots + C_n\,{}^{n}y_n + {}^{\mathrm{p}}y_n. \end{array}},$$

vektorově

$$\boxed{\mathbf{y} = C_1\begin{pmatrix} {}^{1}y_1 \\ {}^{1}y_2 \\ \ldots \\ {}^{1}y_n \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} {}^{2}y_1 \\ {}^{2}y_2 \\ \ldots \\ {}^{2}y_n \end{pmatrix} + \ldots + C_n\begin{pmatrix} {}^{n}y_1 \\ {}^{n}y_2 \\ \ldots \\ {}^{n}y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{p}}y_1 \\ {}^{\mathrm{p}}y_2 \\ \ldots \\ {}^{\mathrm{p}}y_n \end{pmatrix} = {}^{\mathrm{h}}\mathbf{y} + {}^{\mathrm{p}}\mathbf{y}},$$

kde ${}^{\mathrm{p}}\mathbf{y} \equiv \left({}^{\mathrm{p}}y_1,\ {}^{\mathrm{p}}y_{2,}\ \ldots,\ {}^{\mathrm{p}}y_n\right)^{\mathrm{T}}$ je libovolné partikulární řešení nehomogenní soustavy a ${}^{\mathrm{h}}\mathbf{y}$ představuje obecné řešení homogenní soustavy.

Poznámka.
Obdobná věta, že obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice, platí i pro obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice vyššího řádu.

Partikulární řešení ${}^{\mathrm{p}}\mathbf{y} \equiv \left({}^{\mathrm{p}}y_1,\ {}^{\mathrm{p}}y_{2,}\ \ldots,\ {}^{\mathrm{p}}y_n\right)^{\mathrm{T}}$ nehomogenní soustavy můžeme určit *metodou variace konstant*, jak o tom hovoří následující věta.

Věta (variace konstant).
Je-li znám fundamentální systém $\left\{{}^{k}y_j\right\}$ příslušné homogenní soustavy, pak partikulární řešení nehomogenní soustavy můžeme hledat ve tvaru

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^{\mathrm{p}}y_1 = C_1(x)\,{}^{1}y_1 + C_2(x)\,{}^{2}y_1 + \ldots + C_n(x)\,{}^{n}y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{\mathrm{p}}y_n = C_1(x)\,{}^{1}y_n + C_2(x)\,{}^{2}y_n + \ldots + C_n(x)\,{}^{n}y_n. \end{array}},$$

variace konstant pro soustavy

vektorově

$$\boxed{{}^{\mathrm{p}}\mathbf{y} = C_1(x)\begin{pmatrix} {}^{1}y_1 \\ {}^{1}y_2 \\ \ldots \\ {}^{1}y_n \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} {}^{2}y_1 \\ {}^{2}y_2 \\ \ldots \\ {}^{2}y_n \end{pmatrix} + \ldots + C_n(x)\begin{pmatrix} {}^{n}y_1 \\ {}^{n}y_2 \\ \ldots \\ {}^{n}y_n \end{pmatrix}},$$

tzn. ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice, kde původní konstanty jsou nyní funkce proměnné x.

nalezení konstant

Věta.

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ je možné zvolit tak, aby vyhovovaly soustavě rovnic

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1'(x)\,{}^1y_1 + C_2'(x)\,{}^2y_1 + \ldots + C_n'(x)\,{}^ny_1 = f_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\,{}^1y_n + C_2'(x)\,{}^2y_n + \ldots + C_n'(x)\,{}^ny_n = f_n(x) \end{array}}$$

která je jednoznačně řešitelná.

Shrnutí kapitoly:

Kapitola obsahuje základní teoretické výsledky platné pro normální soustavy n lineárních diferenciálních rovnic. Při použití vektorového zápisu jsou získané závěry obdobné jako v teorii řešení lineární diferenciální rovnice vyššího řádu.

Normální soustavy lineárních diferenciálních rovnic dělíme podle tvaru pravé strany na homogenní a nehomogenní.

Fundamentálním systémem rozumíme n lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy. O lineární nezávislosti množiny n řešení se lze přesvědčit pomocí hodnoty determinantu, jehož sloupce tvoří jednotlivá řešení.

Obecné řešení homogenní soustavy má tvar lineární kombinace řešení z fundamentálního systému, kde koeficienty lineární kombinace jsou nezávislé parametry, zvané konstanty.

Obecné řešení nehomogenní soustavy má tvar součtu obecného řešení příslušné homogenní soustavy a libovolného (partikulárního) řešení nehomogenní soustavy.

Partikulární řešení nehomogenní soustavy lze hledat metodou variace konstant ve tvaru shodném s obecným řešením homogenní soustavy, kde konstanty jsou nahrazeny (zatím neznámými) funkcemi. K nalezení těchto funkcí je možné použít předem připravenou soustavu algebraických lineárních rovnic pro jejich první derivace.

Otázky:

- Jak vypadá tzv. normální soustava lineárních diferenciálních rovnic? Čím se liší od obecné normální soustavy diferenciálních rovnic?
- Definujte fundamentální systém normální soustavy n lineárních rovnic. Jak rozpoznáme lineární nezávislost systému n jejích řešení?
- Jak pomocí fundamentálního systému sestrojíme obecné řešení (integrál) normální soustavy lineárních rovnic?
- V jaké formě lze hledat obecné řešení nehomogenní rovnice?
- Jak metodou variace konstant nalezneme partikulární řešení nehomogenní rovnice?

Průvodce studiem.

Asi Vás již ta spousta teorie zmáhá, ale věřím, že Vám hodně pomáhá již zmíněná analogie s řešením lineárních diferenciálních rovnic vyššího řádu. V následující, již poslední (sláva!) kapitole si konečně zase trochu započítáte.

C3. NORMÁLNÍ SOUSTAVA LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

V této kapitole se dozvíte:

- jak vypadá homogenní a nehomogenní normální soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty;
- přesný postup, jak nalézt fundamentální systém této soustavy.

Budete schopni:

- vyřešit homogenní a nehomogenní normální soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Klíčová slova této kapitoly:

normální soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, fundamentální systém.

Čas potřebný k prostudování učiva kapitoly:

0,75 + 2,0 hodiny (teorie + řešení úloh)

Poznámka.
Protože lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je speciálním případem obecné lineární diferenciální rovnice, platí pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty všechny výsledky uvedené v předchozí kapitole.

Definice.
Normální soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty má tvar

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{array}},$$

vektorově

$$\boxed{\mathbf{y}' \equiv \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}},$$

kde veličiny a_{jk}, $j,k = 1,2,\ldots,n$, jsou libovolná (reálná) čísla a $f_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,n$ jsou libovolné (reálné) funkce. Pokud jsou všechny funkce $f_j(x)$ nulové ($\mathbf{f} = 0$), jedná se o *homogenní* soustavu, jinak jde o soustavu *nehomogenní*.

Metoda nalezení fundamentálního systému.
Předpokládáme řešení homogenní soustavy ve tvaru

$$y_1 = k_1 e^{\lambda x},\ y_2 = k_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = k_n e^{\lambda x}, \text{ vektorově } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_n \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}.$$

Po dosazení do homogenní soustavy a úpravě dostaneme algebraickou soustavu n rovnic pro n neznámých konstant $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ s parametrem λ

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n &= 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-\lambda)k_2 + \ldots + a_{2n}k_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)k_n &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

která má netriviální (nenulové) řešení právě tehdy je-li její determinant

charakteristická rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Získaná rovnice je algebraickou rovnicí n-tého stupně pro neznámou λ a nazýváme ji *charakteristickou rovnicí* soustavy.

Jednoduché kořeny charakteristické rovnice.
Nechť má charakteristická rovnice n kořenů navzájem různých $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$. Každý z těchto kořenů λ_j dosadíme do soustavy (1) a jejím řešením obdržíme n konstant ${}^j k_1,\ {}^j k_2,\ \ldots,\ {}^j k_n$, určených až na libovolný násobek. Fundamentální systém homogenní soustavy pak vypadá takto:

fundamentální systém

$$\boxed{\begin{aligned} &{}^1y_1 = {}^1k_1 e^{\lambda_1},\ {}^1y_2 = {}^1k_2 e^{\lambda_1},\ \ldots,\ {}^1y_n = {}^1k_n e^{\lambda_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &{}^ny_1 = {}^nk_1 e^{\lambda_n},\ {}^ny_2 = {}^nk_2 e^{\lambda_n},\ \ldots,\ {}^ny_n = {}^nk_n e^{\lambda_n}. \end{aligned}},$$

vektorově

$$\boxed{\begin{pmatrix} {}^1k_1 \\ {}^1k_2 \\ \ldots \\ {}^1k_n \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \begin{pmatrix} {}^2k_1 \\ {}^2k_2 \\ \ldots \\ {}^2k_n \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x}, \ldots, \begin{pmatrix} {}^nk_1 \\ {}^nk_2 \\ \ldots \\ {}^nk_n \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}.}$$

Násobné kořeny charakteristické rovnice.
Je-li nějaký kořen λ_i charakteristické rovnice *r*-násobný, pak musíme řešení, příslušející tomuto kořenu, hledat v obecnějším tvaru

$$ {}^{i}y_1 = {}^{i}P_1(x)e^{\lambda_i x},\ {}^{i}y_2 = {}^{i}P_2(x)e^{\lambda_i x},\ \ldots.,\ {}^{i}y_n = {}^{i}P_n(x)e^{\lambda_i x}, $$

vektorově

$$ \begin{pmatrix} {}^{i}P_1(x) \\ {}^{i}P_2(x) \\ \ldots \\ {}^{i}P_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda_i x}, $$

kde symboly ${}^{i}P_j$ představují polynomy nejvýše $(r-1)$-ho stupně. Koeficienty těchto polynomů vypočteme metodou neurčitých koeficientů po dosazení předpokládaného řešení do výchozí homogenní soustavy.

Komplexní kořeny charakteristické rovnice.
I když jsou koeficienty a_{jk} reálné, mohou se mezi řešeními vyskytnout dvojice komplexně sdružených kořenů, a to i vícenásobných. Pak řešení, získaná podle předchozí teorie, jsou také komplexní. Jestliže požadujeme pouze reálná řešení, musíme z nalezených komplexních řešení sestrojit reálná řešení jako jejich vhodné lineární kombinace.

Konstrukce obecného řešení.
Známe-li fundamentální systém normální soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty, můžeme podle výsledků předchozí kapitoly nalézt obecné řešení homogenní soustavy (jako lineární kombinaci řešení fundamentálního systému) a je-li soustava nehomogenní, také partikulární řešení nehomogenní soustavy (metodou variace konstant) a její obecné řešení (součet obecného řešení homogenní soustavy a partikulárního řešení nehomogenní soustavy).

Poznámka.
Soustavy lineárních diferenciálních rovnic (homogenních i nehomogenních) se často řeší tak, že se převedou na jednu lineární rovnici n-tého řádu pro jednu neznámou funkci. Postupuje se při tom tak, že se z určité rovnice soustavy vyjádří určitá (neznámá) funkce pomocí ostatních funkcí (a obecně i jejich derivací) a dosadí do zbylých rovnic soustavy. Tím se sníží počet rovnic a neznámých funkcí o jednu, ovšem se současným zvýšením řádu soustavy (nejvyšší derivace) o jednu. Tento postup se opakuje, dokud nezbude pouze jedna funkce a jedna rovnice. Ta se vyřeší a zpětným postupem se naleznou i ostatní neznámé funkce.

praktická metoda řešení

Shrnutí kapitoly:

Normální soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty je speciálním případem normální soustavy obecných lineárních diferenciálních rovnic, probírané v předchozí kapitole.

Pro normální soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty existuje přesný postup nalezení fundamentálního systému. Tento postup je částečně analogický hledání fundamentálního systému pro lineární diferenciální rovnici vyššího řádu. Předpokládá se exponenciální řešení a pro neznámý exponent je zformulována charakteristická rovnice. Další kroky záleží na tom, zda má charakteristická rovnice jednoduché nebo násobné, resp. reálné nebo komplexní kořeny. Výhodné je zde použití vektorového zápisu při práci s n-ticemi funkcí.

Ze znalosti fundamentálního systému je nakonec možné na základě výsledků předchozí kapitoly sestavit obecné řešení výchozí soustavy rovnic.

Otázky:

- Jak vypadá normální soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty? Čím se liší od normální soustavy obecných lineárních diferenciálních rovnic?
- Jakým postupem nalezneme fundamentální systém normální soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty? Jaký tvar má chrakteristická rovnice? Jaké varianty postupu mohou nastat vzhledem k řešení charakteristické rovnice?
- Jak pomocí fundamentálního systému sestrojíme obecné řešení (integrál) výchozí soustavy?

Příklad.

Řešte soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y = e^t \\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y \end{aligned} \quad . \qquad (1)$$

Řešení.

Jedná se o soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty pro dvě neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$, a to díky členu e^t na pravé straně první rovnice soustavu nehomogenní. V dalším budeme používat zápisu derivací $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{y}$, neboť i toto značení je v praxi poměrně časté, zejména tehdy, je-li nezávislá proměnná označena t.

1. Řešení převodem na normální soustavu diferenciálních rovnic.

Převést soustavu (1) na normální tvar znamená vyřešit ji jako soustavu lineárních rovnic pro neznámé $\dot{x}$, $\dot{y}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + e^t \\ \dot{y} &= -3x - 2y \end{aligned}, \text{ maticově } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice soustavy má tvar

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ -3 & -2-\lambda \end{pmatrix} \equiv (-\lambda)(-2-\lambda)-(-1)(-3)=0\,,$$

což je kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$. Protože se jedná o dva různé a reálné kořeny, je reálný *fundamentální systém* soustavy tvořen dvěma dvojicemi funkcí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1x}e^t \\ k_{1y}e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1x} \\ k_{1y} \end{pmatrix} e^t\,,\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{2x}e^{-3t} \\ k_{2y}e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{2x} \\ k_{2y} \end{pmatrix} e^{-3t}\,.$$

Hodnoty zatím neznámých konstant dostaneme postupným dosazením obou dvojic funkcí do homogenní soustavy. Po provedení prvních derivací na levé straně, vykrácení rovnic exponenciálním členem a jednoduchých úpravách obdržíme dvě soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{1x} \\ k_{1y} \end{pmatrix} = 0\,,\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{2x} \\ k_{2y} \end{pmatrix} = 0\,,$$

které nejsou (a nemají být) jednoznačně řešitelné. Zvolíme si výhodně $k_{1x} = k_{2x} = 1$ a dostaneme $k_{1y} = -1,\ k_{2y} = 3$. *Obecné řešení homogenní soustavy* má tudíž tvar

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{-3t} \\ -C_1e^t + 3C_2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Nyní musíme najít partikulární integrál nehomogenní soustavy. Použijeme metodu variace konstant. Předpokládáme partikulární řešení ve tvaru obdobném obecnému řešení (homogenní soustavy, kde ale veličiny C_1, C_2 pokládáme za zatím neznámé funkce proměnné t:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = C_1(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-3t} \\ -C_1(t)e^t + 3C_2(t)e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Dosazením do nehomogenní soustavy obdržíme pro první derivace funkcí C_1, C_2 soustavu lineárních rovnic

$$\dot{C}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \dot{C}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{nebo-li}\ \begin{array}{r} \dot{C}_1e^t + \dot{C}_2e^{-3t} = e^t \\ -\dot{C}_1e^t + 3\dot{C}_2e^{-3t} = 0 \end{array}.$$

Řešením této soustavy (např. Cramerovým pravidlem) získáme hodnoty $\dot{C}_1 = \frac{3}{4}$, $\dot{C}_2 = \frac{1}{4}e^{4t}$, odkud

$$C_1 = \int \frac{3}{4}\mathrm{d}t = \frac{3}{4}t\,,\ C_2 = \int \frac{1}{4}e^{4t}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}e^{4t}\,.$$

Integrační konstanty při integraci volíme rovny nule (stačí nám jakékoliv řešení). Dosazením výsledku do předpokládaného tvaru partikulárního řešení po úpravě obdržíme

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t + \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{4}t + \frac{3}{16} \end{pmatrix} e^t\,.$$

Obecné řešení nehomogenní soustavy je součtem obecného řešení homogenní soustavy a partikulárního řešení nehomogenní soustavy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t + \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{4}t + \frac{3}{16} \end{pmatrix}e^t =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t + \frac{1}{16} + C_1 \\ -\frac{3}{4}t + \frac{3}{16} - C_1 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-3t}\,.$$

Na závěr zavedeme novou konstantu $C_1 + \frac{1}{16}$ místo konstanty C_1, ale ponecháme původní označení C_1, čímž dostaneme přehlednější vyjádření

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t + C_1 \\ -\frac{3}{4}t + \frac{1}{4} - C_1 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-3t} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}t + C_1\right)e^t + C_2e^{-3t} \\ \left(-\frac{3}{4}t + \frac{1}{4} - C_1\right)e^t + 3C_2e^{-3t} \end{pmatrix}}}\,.$$

2. Řešení převodem na diferenciální rovnici vyššího řádu.

Využijeme příznivého tvaru první rovnice, ze které jednoduše vyjádříme funkci y pomocí první derivace funkce x a proměnné t takto:

$$y = -\dot{x} + e^t\,. \quad (2)$$

Výsledek dosadíme do druhé rovnice soustavy. Po provedení derivace na levé straně a jednoduché úpravě obdržíme nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci x

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 3e^t\,.$$

Tuto diferenciální rovnici již umíme řešit. Příslušná charakteristická rovnice má tvar $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, což je rovnice ekvivalentní charakteristické rovnici získané v první metodě. Její kořeny jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$.

Obecné řešení homogenní rovnice tudíž je

$$x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} .$$

Partikulární řešení můžeme hledat ve tvaru $x_p = a_0 t e^t$ (speciální pravá strana, kořen charakteristické rovnice 1) a snadno nalezneme

$$x_p = \frac{3}{4} t e^t .$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem

$$\underline{\underline{x}} = x_h + x_p = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} + \frac{3}{4} t e^t = \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{4} t + C_1\right) e^t + C_2 e^{-3t}}} .$$

Dosazením výsledku do vyjádření (2) dostaneme pro druhou neznámou funkci y

$$\underline{\underline{y = \left(-\tfrac{3}{4} t + \tfrac{1}{4} - C_1\right) e^t + 3 C_2 e^{-3t}}} .$$

Je zřejmé, že výsledek je stejný jako výsledek prvního postupu.

Úloha C3.1.

Řešte soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

a) $\begin{array}{l} \dot{x} + x - y = e^t \\ \dot{y} - x + y = e^t \end{array}$; b) $\begin{array}{l} 5\dot{x} - 2\dot{y} + 4x - y = e^{-t} \\ \dot{x} + 8x - 3y = 5e^{-t} \end{array}$; c) $\begin{array}{l} \dot{x} + 3x + y = 0 \\ \dot{y} - x + y = 0 \end{array}$, $x(0) = 1,\ y(0) = 1$;

d) $\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 2\sinh t \end{array}$; e) $\begin{array}{l} \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x - y = 0 \\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y - 25x = 16e^t \end{array}$.

Návod.

Hyperbolický sinus a kosinus : $\sinh t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$, $\cosh t = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$.

Průvodce studiem.

Blahopřeji! Právě jste dokončil(a) poměrně náročný modul aplikované matematiky. Jistě to pro Vás nebylo jednoduché, ale získané poznatky a schopnosti se Vám v praxi budou určitě hodit. Nyní už jen vyřešte zbývající korespondenční úkoly a odešlete je tutorovi.

Korespondenční úkol k části C.

Vytvořte si vlastní normální soustavu lineárních diferenciálních rovnic, pokud možno netriviální, a tu podrobně vyřešte. Můžete např. použít některou soustavu z úlohy C3.1., kterou si mírně upravíte.

Ř E Š E N Í Ú L O H

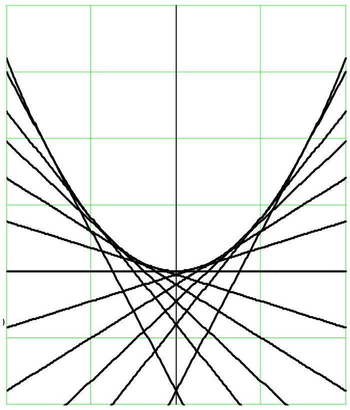
A1. Základní pojmy.

A1.1a) Dosazením $y = Cx - C^2$ a $y' = C$ do výchozí rovnice obdržíme $Cx - C^2 = xC - C^2$, což je zjevně identita platná v celém reálném oboru a pro libovolné C. Protože řešení obsahuje právě jednu volitelnou konstantu a výchozí diferenciální rovnice je prvního řádu, musí jít nutně o její obecné řešení.

A1.1b) Z podmínky $y(1) = -2$ plyne $-2 = C \cdot 1 - C^2$, nebo-li $C^2 - C - 2 = 0$. Řešením vzniklé kvadratické rovnice je $C = 2$ nebo $C = -1$, odkud $\underline{\underline{y = 2x - 4}}$ nebo $\underline{\underline{y = -x - 1}}$. Vzniklá dvojznačnost je ovšem možná, neboť výchozí rovnice není ve tvaru rozřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci.

A1.1c) Ano, protože vyhovuje výchozí rovnici a její tvar neodpovídá obecnému řešení. ($y = \frac{x^2}{4}$, $y' = \frac{x}{2}$, $L = \frac{x^2}{4}$, $P = x\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$, $L = P$).

A1.1d) Jedná se o soustavu přímek, jejíž obálkou je parabola.



A2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

A2.1a) $y = Cx$, $y = -2x$; **A2.1b)** $xy = C$, $xy = -1$;

A2.1c) $y = Ce^x$, $y = 2e^x$; **A2.1d)** $y = Ce^{\frac{1}{x}}$, $y = e^{1+\frac{1}{x}}$;

A2.1e) $y = Ce^{\sqrt{x}}$, $y = e^{\sqrt{x}-2}$; **A2.1f)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C$, $y = -x$;

A2.1f) $2y = \frac{Cx^2}{(1+x)^2} - 1$; **A2.1g)** $y = \frac{C - x}{1 + Cx}$.

A3. Homogenní diferenciální rovnice.

A3.1a) $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$; **A3.1b)** $x^2-y^2=Cx$, $x^2-y^2=-x$;

A3.1c) $\sin\frac{y}{x}+\ln x=C$; **A3.1d)** $y=\frac{x}{C-\ln x}$, $y=-\frac{x}{1+\ln x}$;

A3.1e) $y^2=Cxe^{-\frac{y}{x}}$; **A3.1f)** $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x}, \sqrt{\frac{y}{x}}=1-\ln x$.

A4. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

A4.1a) $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$; **A4.1a)** $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$, $y=\frac{1-\cos 2x}{2\cos x}$;

A4.1c) $y=\ln x+\frac{C}{x}, y=\ln x-\frac{1}{2x}$; **A4.1d)** $y=\frac{x-1}{3}+\frac{C}{\sqrt{2x+1}}$, $y=\frac{x-1}{3}$;

A4.1e) $y=x\cdot\operatorname{tg}x+\frac{C}{\cos x}+1$, $y=x\cdot\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{2}}{2\cos x}+1$;

A4.1f) $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$, $y=2(\sin x-1)+e^{1-\sin x}$.

A5. Exaktní diferenciální rovnice.

A5.1a) $4x^2+y^2=Cx$; **A5.1b)** $x^3e^y-y=C$; **A5.1c)** $y+xe^{-y}=C$;

A5.1d) $x^2\cos^2 y+y^2=C$; **A5.1e)** $m=\cos y$, $x^2\sin y+\frac{1}{2}\cos 2y=C$;

A5.1f) $m=\frac{1}{x^4}$, $y^2=Cx^3+x^2$.

A6. Diferenciální rovnice prvního řádu nerozřešené vzhledem k derivaci.

A6.1a) $y=1+\frac{(x+C)^2}{4}$, sing. $y=1$; **A6.1b)** $y=Cx-C^2$, sing. $y=\frac{x^2}{4}$;

A6.1c) $y=Cx-\sqrt{1+C^2}$, sing. $x^2+y^2=1$; **A6.1d)** $y=Cx+\frac{1}{2C^2}$, sing. $y=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$;

A6.1e) $y=\left(C+\sqrt{x+1}\right)^2$, sing. $y=0$; **A6.1f)** $Cy=(x-C)^2$, sing. $y=0$, $y=-4x$.

B1. Jednoduché diferenciální rovnice vyššího řádu.

B1.1a) $y=-\cos 2x+C_1x+C_2$, $y=1-\cos 2x$;

B1.1b) $y=\frac{8}{105}\sqrt{x^7}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$, $y=\frac{8}{105}\sqrt{x^7}-x^2+1$.

B1.2a) 2a) $y=C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$;

B1.2b) 2b) $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$.

B3. Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

B3.1a) 1a) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$; **B3.1b)** 1b) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$;

B3.1c) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$; **B3.1d)** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;

B3.1e) $y=C_1+C_2e^{-4x}$; **B3.1f)** $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$; **B3.1g)** $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}$;

B3.1f) $y=C_1e^{2x}+\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)e^{-x}$; **B3.1g)** $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^{-ax}$;

B3.1h) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$;

B3.1i) $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x+C_3e^{-x}\cos x+C_4e^{-x}\sin x$.

B4. Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

B4.1a) $y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x$; **B4.1b)** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}$;

B4.1c) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$; **B4.1d)** $y=C_1e^{x/2}+C_2e^{-x/2}-x^3$;

B4.1e) $y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{3x}{2}+C_2\sin\frac{3x}{2}\right)-6\cos 2x+8\sin 2x$;

B4.1f) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$;

B4.1g) $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}-(x-2)e^{-x}$;

B4.1h) 1h) $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$;

B4.1i) 1i) $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$;

B4.1j) $y=\left(C_1-\frac{x}{2}\right)\cos 2x+\left(C_2+\frac{1}{4}\ln\sin 2x\right)\sin 2x$;

B4.1k) 1k) $y=(C_1-\ln x+C_2x)e^x$; **B4.1l)** $y=\left(-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+C_1+C_2x\right)e^{-2x}$.

C3. Normální soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

C3.1a) $\begin{array}{l} x = C_1 + C_2 e^{-2t} + e^t \\ y = C_1 - C_2 e^{-2t} + e^t \end{array};$

C3.1b) $\begin{array}{l} x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + 2e^{-t} \\ y = 3C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t} + 3e^{-t} \end{array};$

C3.1c) $\begin{array}{l} x = \left(C_1 t + C_2\right) e^{-2t} \\ y = \left(-C_1 t - C_1 - C_2\right) e^{-2t} \end{array}, \quad \begin{array}{l} x = \left(-2t + 1\right) e^{-2t} \\ y = \left(2t + 1\right) e^{-2t} \end{array};$

C3.1d) $\begin{array}{l} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t\cosh t \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + t\sinh t + \cosh t \end{array};$

C3.1e) $\begin{array}{l} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t - e^t \\ y = C_1 e^{3t} + 25C_2 e^{-3t} - 4C_4 \cos t + \left(4C_3 + 3C_4\right)\sin t - e^t \end{array}.$

LITERATURA

1. KALUS, R., HRIVŇÁK, D. *Breviář vyšší matematiky*. 1. vyd. Ostrava: Ostravská univerzita, 2001. 132 s. ISBN 80-7042-819-8.
2. REKTORYS, K. a spol. *Přehled užité matematiky*. 6. přepr. vyd. Praha: Prometheus, 1995.
3. BARTSCH, H. J. Matematické vzorce. Přel. Zd. Tichý. 3. rev. vyd. Praha: Mladá fronta, 2000.

P O Z N Á M K Y